



1 第1课时 探索勾股定理

A 知识要点分类练

夯实基础

知识点 1 勾股定理

1. 如图 1-1-1, $\triangle ABC$ 中, $AC=3$, $BC=4$, $\angle C=90^\circ$, 则 AB^2 的值为 ()

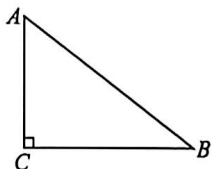


图 1-1-1

- A. 5 B. 9 C. 16 D. 25
2. 若 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AB=17$, $BC=8$, 则 AC 的长为 ()
- A. 12 B. 14 C. 15 D. 16
3. 下列说法中正确的是 ()
- A. 已知 a, b, c 是三角形的三边长, 则 $a^2 + b^2 = c^2$
- B. 在直角三角形中, 两边和的平方等于第三边的平方
- C. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 所以 $AC^2 + BC^2 = AB^2$
- D. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B=90^\circ$, 所以 $AC^2 + BC^2 = AB^2$
4. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, a, b, c 分别是 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边.
- (1) 若 $a=12, b=5$, 则 $c=$ _____;
- (2) 若 $c=17, b=15$, 则 $a=$ _____.
5. 如图 1-1-2, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 BC 边上的高, 已知 $AB=15$, $BC=14$, $AD=12$, 则 CD 的长为 _____.

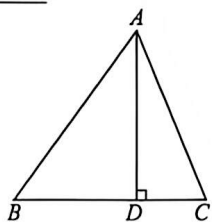


图 1-1-2

6. 如图 1-1-3, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=8$, $AC=6$, $AD \perp BC$, 垂足为 D .

- (1) 求 BC 的长;
- (2) 求 AD 的长.

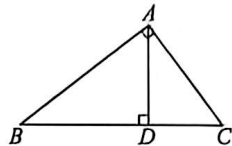


图 1-1-3

7. 如图 1-1-4, 一个高 1.5 m, 宽 3.6 m 的长方形大门, 需要在相对的顶点间用一块木板加固, 亮亮有一块长 3.84 m 的木板, 这块木板的长度够吗? 请说明理由.

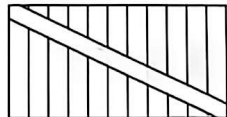


图 1-1-4

知识点 2 勾股定理与面积计算

8. (教材随堂练习 T1 变式) 如图 1-1-5, 已知两个正方形的面积分别为 225, 289, 则字母 A 所代表的正方形的面积为 ()

A. 4 B. 8 C. 64 D. 16

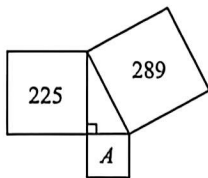


图 1-1-5

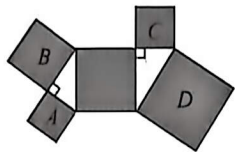


图 1-1-6

9. 如图 1-1-6, 所有阴影四边形都是正方形, 所有三角形都是直角三角形, 若正方形 A, B, D 的面积依次为 6, 10, 24, 则正方形 C 的面积为 ()

A. 4 B. 6 C. 8 D. 12

10. 如图 1-1-7 所示的阴影部分是两个正方形, 其他部分是一个正方形和两个直角三角形, 则这两个阴影正方形的面积和为 _____.

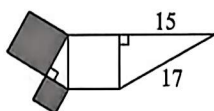


图 1-1-7

B 规律方法综合练

训练思维

11. **数学思想 分类讨论** 一个直角三角形三边长分别是 4, 5, a , 那么以 a 为边长的正方形的面积为 ()

A. 9 B. 41 C. 41 或 9 D. 3

12. (2025 西安交大附中月考) 如图 1-1-8, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 分别以这个三角形的三边长为边长作正方形, 面积分别记为 S_1, S_2, S_3 , 若 $S_1 + S_3 - S_2 = 32$, 则阴影部分的面积为 ()

A. 8 B. 14 C. 16 D. 18

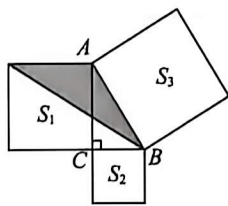


图 1-1-8

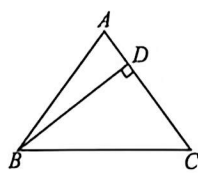


图 1-1-9

13. 如图 1-1-9, 等腰三角形 ABC 中, $AB = AC$, $BC = 10$, $BD \perp AC$ 于点 D , 且 $BD = 8$, 则 $S_{\triangle ABC} =$ _____.

14. 如图 1-1-10, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边分别为 a, b, c .

(1) 若 $a : b = 3 : 4, c = 10$, 求 a, b 的值;

(2) 若 $a + b = 7, c = 5$, 求 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的面积.

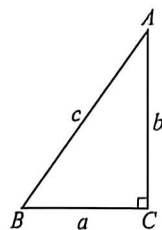


图 1-1-10

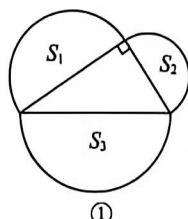
C 拓广探究创新练

提升素养

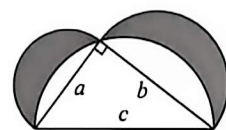
15. **核心素养 推理能力** 根据勾股定理知识迁移, 解决下列问题.

(1) 如图 1-1-11①, 分别以直角三角形的三边为直径向外侧作半圆, 则它们的面积 S_1, S_2, S_3 之间满足的等量关系是 _____;

(2) 应用: 如图②, 直角三角形的两条直角边长分别为 a, b , 斜边长为 c , 分别以三边为直径作半圆, 若 $a = 3, c = 5$, 则图中阴影部分的面积为 _____.



①



②

图 1-1-11

第2课时 勾股定理的验证及其简单应用

A 知识要点分类练

夯实基础

知识点1 勾股定理的验证

1. 已知:如图 1-1-12,用四个两直角边长分别为 a, b ,斜边长为 c 的直角三角形拼成一个正方形,求图形中央的小正方形的面积.

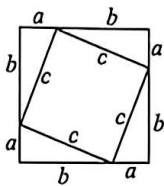


图 1-1-12

解法(1):小正方形的面积=_____;

解法(2):小正方形的面积=_____.

由解法(1)(2),可以得到 a, b, c 之间的关系式为_____.

2. (教材习题 1.1T5 变式)如图 1-1-13 叫“赵爽弦图”,此图由四个全等的直角三角形(阴影部分)围成一个大正方形,中空的部分是一个小正方形.它是我国古代数学家赵爽在注解《周髀》时给出的,其巧妙地利用图形的面积证明了“勾股定理”,表现了我国古人对数学的钻研精神和聪明才智,是我国古代数学的骄傲.

(1)请你写出“勾股定理”的内容;

(2)请你利用图形的面积,结合图 1-1-13 完成勾股定理的验证.

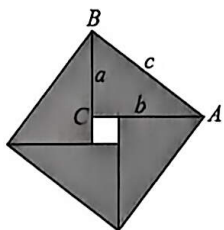


图 1-1-13

知识点2 勾股定理的简单应用

3. (教材习题 1.1T3 变式)如图 1-1-14,一棵高为 8 m 的大树被台风刮断,若大树在离地面 3 m 的点 C 处折断,则树顶端落在离树底部()
- A. 4 m 处 B. 5 m 处
C. 6 m 处 D. 7 m 处

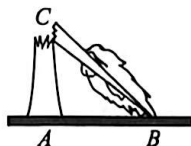


图 1-1-14

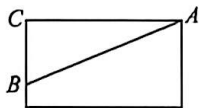


图 1-1-15

4. 课间休息时,嘉嘉从教室窗户向外看,看到有些同学为从 A 处快速到达 B 处的图书馆,直接从长方形草地中穿过.为保护草地,嘉嘉想在 A 处立一个标牌:“少走■米,踏之何忍?”如图 1-1-15,若 $AB = 17$ 米, $BC = 8$ 米,则标牌上“■”处的数字是()
- A. 6 B. 8 C. 10 D. 11
5. (教材例题变式)《中华人民共和国道路交通安全法》规定:小汽车在城市街道上的行驶速度不得超过 70 km/h.如图 1-1-16,一辆小汽车在一条城市街道上沿直道行驶,某一时刻刚好行驶到车速检测仪 A 的正前方 90 m 处的 B 点,过了 8 s,测得小汽车所在的 C 点与车速检测仪 A 之间的距离为 150 m.判断这辆小汽车是否超速,并说明理由.

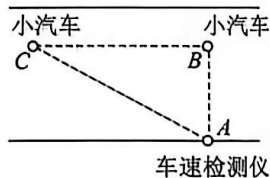


图 1-1-16

6. 我国是最早了解勾股定理的国家之一,下面四幅图中,不能验证勾股定理的是 ()

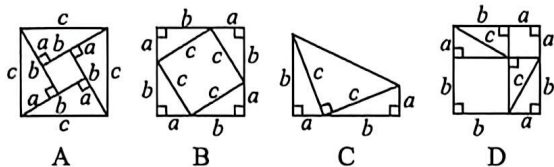


图 1-1-17

7. 第 24 届国际数学家大会会徽的设计基础是 1700 多年前中国古代数学家赵爽的“弦图”. 如图 1-1-18, 在由四个全等的直角三角形 ($\triangle ADH$, $\triangle ABE$, $\triangle BCF$, $\triangle CDG$) 和中间一个小正方形 $EFGH$ 拼成的大正方形 $ABCD$ 中, $\angle ABE > \angle BAE$, 连接 CE . 若小正方形 $EFGH$ 的面积是 1, $\triangle BEC$ 的面积是 0.125, 则大正方形 $ABCD$ 的面积为 _____.

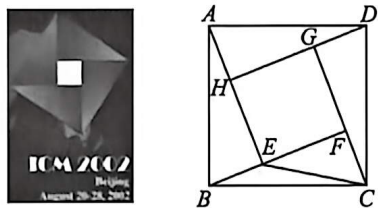


图 1-1-18

8. 如图 1-1-19, 铁路上 A, B 两点相距 25 km, $DA \perp AB$ 于点 A , $CB \perp AB$ 于点 B , 已知 $DA = 15$ km, $CB = 10$ km, 现在要在铁路 AB 上建一个土特产收购站 E , 使得 C, D 两村到 E 站的距离相等, 则 E 站应建在离 A 站多远处?

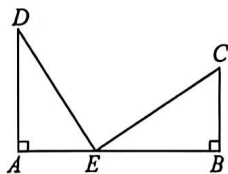


图 1-1-19

9. (教材思考交流变式) 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, 且 $c \geq b \geq a$.

(1) 当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形时, 小明猜想: $a^2 + b^2 > c^2$. 以下是他的猜想过程:

如图 1-1-20①, 过点 A 作 $AD \perp CB$, 垂足为 D . 设 $CD = x$.

因为在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $AD^2 = b^2 - x^2$,

在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中, $AD^2 = \text{①}$,

所以 $b^2 - x^2 = \text{①}$.

化简, 得 $a^2 + b^2 - c^2 = 2ax$.

因为 $a > 0$, $x > 0$, 所以 $\text{②} > 0$.

所以 $a^2 + b^2 - c^2 > 0$.

所以 $a^2 + b^2 > c^2$.

其中, ①是 _____; ②是 _____.

(2) 如图②, 当 $\triangle ABC$ 是钝角三角形时, 猜想 $a^2 + b^2$ 与 c^2 之间的关系并说明理由.

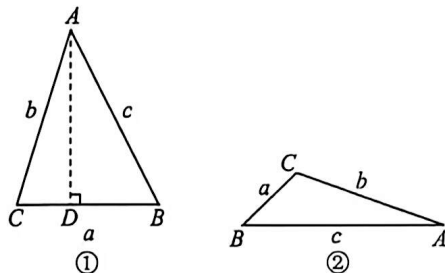


图 1-1-20

2 一定是直角三角形吗

A 知识要点分类练

夯实基础

知识点 1 直角三角形的判别条件

- 下列四组数据不能作为直角三角形的三边长的是 ()
A. 6, 8, 10 B. 5, 12, 13
C. 12, 18, 22 D. 9, 12, 15
- (教材习题 1.2T1 变式) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的对边分别为 a, b, c , 且 $a^2 - b^2 = c^2$, 则下列说法正确的是 ()
A. $\angle C$ 是直角 B. $\angle B$ 是直角
C. $\angle A$ 是直角 D. 无法判断
- 已知一个三角形的三边长分别为 15, 20, 25, 则这个三角形最长边上的高为 ()
A. 10 B. 12
C. 13 D. 16
- 新情境 日常生活** 如图 1-2-1, 小红家的木门左下角有一点受潮, 她想检测门是否变形, 准备采用如下方法: 先测量门的边 AB 和 BC 的长, 再测量点 A 和点 C 间的距离, 由此可推断 $\angle B$ 是不是直角, 这样做的依据是 ()
A. 勾股定理
B. 如果一个三角形中有两边的平方和等于第三边的平方, 那么这个三角形是直角三角形
C. 三角形内角和定理
D. 直角三角形的两锐角互余

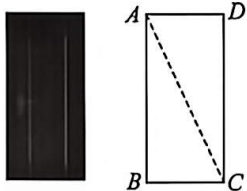


图 1-2-1

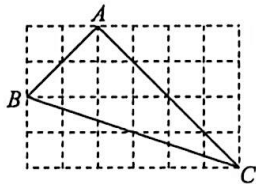


图 1-2-2

- (教材习题 1.2T3 变式) 如图 1-2-2, 将 $\triangle ABC$ 放置在方格纸中, 若每个小正方形的边长均为 1, 则 $AB^2 =$ _____, $AC^2 =$ _____, $BC^2 =$ _____. 所以 $\triangle ABC$ 的形状为 _____ 三角形.

- 判断由下列各组线段 a, b, c 组成的三角形是不是直角三角形.

(1) $a=7, b=24, c=25$;

(2) $a=4, b=5, c=6$;

(3) $a:b:c=5:13:12$.

- (教材随堂练习 T2 变式) 如图 1-2-3, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是 BC 的中点, F 是 CD 上一点, 且 $CF = \frac{1}{4}CD$.

(1) 若 CF 的长度为 1, 求 EF 长度的平方和 AE 长度的平方;

(2) 试说明 $\angle AEF = 90^\circ$.

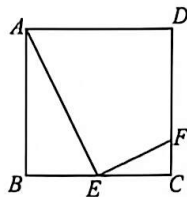


图 1-2-3

知识点 2 勾股数

8. 我国是最早了解勾股定理的国家之一,它被记载于我国古代著名的数学著作《周髀》中. 下列各组数中,是“勾股数”的是 ()
- A. 4,5,6 B. 5,12,13
C. 0.6,0.8,1 D. 5,12,23
9. 将勾股数 3,4,5 扩大为原来的 2 倍、3 倍、4 倍……可以得到勾股数 6,8,10;9,12,15;12,16,20;…,我们把 3,4,5 这样的勾股数称为基本勾股数,请你写出一组不同于以上所给出的基本勾股数:_____.

B 规律方法综合练

训练思维

10. (2025 西安高新一中沣东中学期末改编) 下列条件能判定 $\triangle ABC$ 是直角三角形的是 ()
- A. $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 4 : 5$
B. $\angle A = \angle B = \frac{1}{4} \angle C$
C. $AB=1, BC=2, AC=5$
D. $AB=7, BC=24, AC=25$
11. 若 $\triangle ABC$ 的三边长 a, b, c 满足 $(a-b)^2 + |a^2 + b^2 - c^2| = 0$, 则下列对 $\triangle ABC$ 的形状描述最确切的是 ()
- A. 等腰三角形
B. 直角三角形
C. 等腰直角三角形
D. 等腰三角形或直角三角形
12. 近年来各地积极推动城市绿化工作,大力拓展城市生态空间,让许多城市再现绿水青山. 某小区物业在小区拐角清理出了一块空地,如图 1-2-4, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 12$ m, $BC = 9$ m, $AD = 17$ m, $CD = 8$ m.
- (1)为了方便居民的生活,在绿化时将修一条从点 A 直通点 C 的小路,求小路 AC 的长度;

(2)若该空地的改造费用为每平方米 150 元,试计算改造这片空地共需花费多少元.

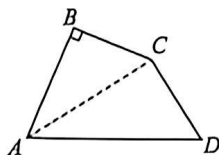


图 1-2-4

拓广探究创新练

提升素养

13. **核心素养 推理能力** 早在我国西汉时期,算书《周髀》就有“勾三股四弦五”的记载. 如果一个直角三角形的三边长都是正整数,那么这样的直角三角形叫作“整数直角三角形”,这三个整数叫作一组“勾股数”. 在一次“构造勾股数”的探究性学习中,老师给出了下表(其中 m, n 为正整数,且 $m > n$):

m	2	3	3	4	4	...
n	1	1	2	1	2	...
a	$2^2 + 1^2$	$3^2 + 1^2$	$3^2 + 2^2$	$4^2 + 1^2$	$4^2 + 2^2$	...
b	4	6	12	8	16	...
c	$2^2 - 1^2$	$3^2 - 1^2$	$3^2 - 2^2$	$4^2 - 1^2$	$4^2 - 2^2$	...

- (1)探究 a, b, c 与 m, n 之间的关系,用含 m, n 的代数式表示: $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____;
- (2)以 a, b, c 为边长的三角形是否一定为直角三角形? 请说明理由.

3 勾股定理的应用

A 知识要点分类练

夯实基础

知识点 1 应用勾股定理解决实际问题

1. 如图 1-3-1 所示,如果梯子 AB 的底端 B 到某高楼竖直墙面底端的距离 BC 为 5 m,那么 13 m 长的梯子 AB 的顶端 A 距地面的高度是 ()

A. 12 m B. 13 m C. 14 m D. 15 m



图 1-3-1

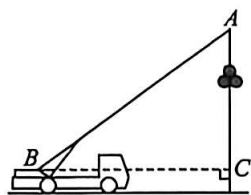


图 1-3-2

2. (2025 西安曲江第二学校期末) 图 1-3-2 是吊车安装路灯的示意图,已知 AB 为吊车起重臂,长为 20 米,点 B 到路灯杆的水平距离 BC 为 16 米,点 B 到地面的竖直距离为 2 米,则起重臂顶端 A 离地面的高度为 ()

A. 12 米 B. 14 米 C. 16 米 D. 18 米

3. 如图 1-3-3,《九章算术》中的“折竹抵地”问题:今有竹高一丈,末折抵地,去根六尺,问折高者几何.意思是:一根竹子,原高一丈(1 丈=10 尺),折断后,其竹梢恰好抵地,抵地处离竹子底部 6 尺远,求折断处离地面的高度.设竹子折断处离地面 x 尺,根据题意,列出的正确方程为 ()

A. $x^2 + 6^2 = 10^2$

B. $(10-x)^2 + 6^2 = x^2$

C. $x^2 + 6^2 = (10-x)^2$

D. $(10-x)^2 + x^2 = 6^2$

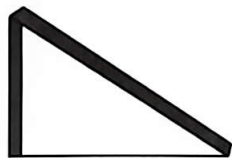


图 1-3-3

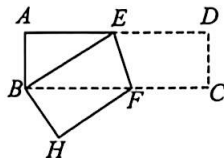


图 1-3-4

4. (教材尝试思考变式) 如图 1-3-4,在长方形纸片 $ABCD$ 中, $AB=3$ cm, $AD=9$ cm,将此长方形纸片折叠,使点 D 与点 B 重合,点 C 落在点 H 的位置,折痕为 EF ,则 $\triangle ABE$ 的面积为 _____ cm^2 .

5. 如图 1-3-5,把摆钟的摆锤看作一个点,当它摆动到最低点时,摆锤离底座的垂直高度 $DE=5$ cm,当它摆动到最高点时,摆锤离底座的垂直高度 $BF=7$ cm,且与摆锤在最低点时的水平距离 BC 为 10 cm,求钟摆 AD 的长.

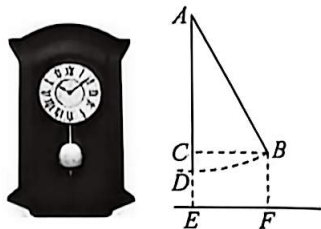


图 1-3-5

知识点 2 应用直角三角形的判定条件解决实际问题

6. (教材随堂练习变式) 有五根小木棒,其长度分别为 7,15,20,24,25,现将它们摆成两个直角三角形,其中正确的是 ()

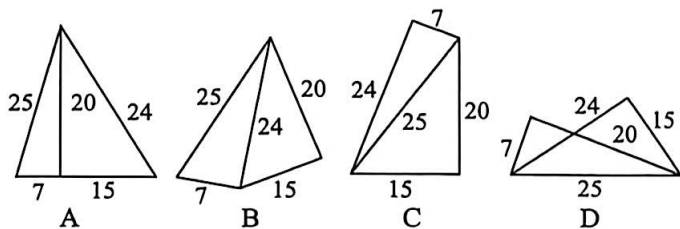


图 1-3-6

7. 李老师要做一个直角三角形教具,做好后量得三边长分别是 30 cm,40 cm 和 50 cm,则这个教具 _____ (填“合格”或“不合格”).
8. 如图 1-3-7 是某超市购物车的侧面简化示意图.测得支架 $AC=72$ cm, $CB=54$ cm,两轮中心的距离 $AB=90$ cm,则点 C 到 AB 的距离为 _____ cm.

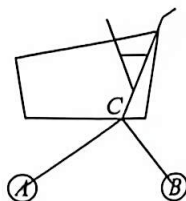


图 1-3-7

9. 如图 1-3-8, 将长方形 $ABCD$ 沿着直线 BD 折叠, 使点 C 落在点 C' 处, BC' 交 AD 于点 E , $AD = 8$, $AB = 4$, 则 DE 的长为 _____.

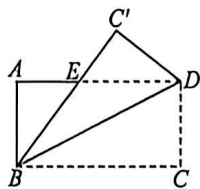


图 1-3-8

10. 如图 1-3-9, 一支长 17 cm 的铅笔放在圆柱体笔筒中(铅笔的粗细不计), 笔筒内部底面圆直径为 9 cm, 内壁高 12 cm, 那么这支铅笔露在笔筒外的部分的长度 x 的最小值是 _____ cm.

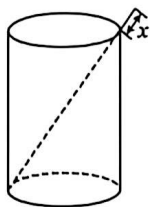


图 1-3-9

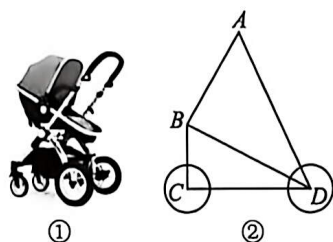


图 1-3-10

11. 如图 1-3-10①是某品牌婴儿车, 图②为其简化结构示意图. 现测得 $AB = CD = 8$ dm, $BC = 4$ dm, $AD = 12$ dm, 其中 AB 与 BD 之间由一个固定角为 90° 的零件连接(即 $\angle ABD = 90^\circ$). 根据安全标准需满足 $BC \perp CD$, 则该婴儿车 _____ (填“符合”或“不符合”)安全标准.
12. (教材习题 1.3T3 变式) 某工厂的大门如图 1-3-11 所示, 其中四边形 $ABCD$ 是长方形, 上部是以 AB 为直径的半圆, 其中 $AD = 2.3$ m, $AB = 2$ m, 现有一辆装满货物的卡车, 高 2.5 m, 宽 1.6 m, 这辆卡车能否通过厂门? 请说明理由.

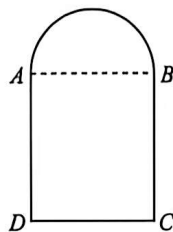


图 1-3-11

13. **新情境 中华优秀传统文化** 剪纸面塑、年画风筝、中医问诊……在某市“欢乐周末·非遗市集”活动现场, 诸多非遗项目集中亮相, 让过往游客、市民看花了眼、“迷”住了心. 小明买了一个年画风筝, 并进行了试放, 为了解决一些问题, 他设计了如下的方案: 如图 1-3-12, 先测得放飞点与风筝的水平距离 BD 为 15 m, 根据手中余线长度, 计算出 AC 的长度为 17 m, 牵线放风筝的手到地面的距离 AB 为 1.5 m. 已知点 A, B, C, D 在同一平面内.

(1) 求风筝离地面的垂直高度 CD ;

(2) 在余线仅剩 7 m 的情况下, 若想要风筝沿射线 DC 方向再上升 12 m, 能否成功? 请说明理由.

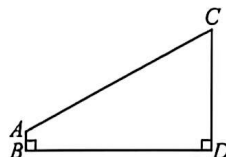


图 1-3-12

专题训练(一) 利用方程思想解决勾股定理问题

► 题型一 单勾股

方法点睛

已知直角三角形中两边的关系和第三边的长度.

如图 1-ZT-1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$\angle C=90^\circ$, $AB+BC=8$, $AC=4$.

解题思路: 设 $AB=x$, 则 $BC=8-x$,

根据勾股定理, 得 $AB^2 = BC^2 + AC^2$,

即 $x^2 = (8-x)^2 + 4^2$.

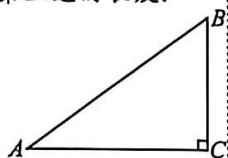


图 1-ZT-1

1. 如图 1-ZT-2, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$

中, $\angle C=90^\circ$. 在边 BC

上有一点 P , 连接 AP ,

且 $PA=PB$. 若 $AC=2$,

$CB=5$, 则 PA 的长为_____.

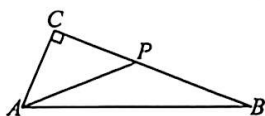


图 1-ZT-2

2. 如图 1-ZT-3, AB 为一棵大树, 在树上距地面 10 m 的 D 处有两只猴子, 它们同时发现地面上的 C 处有一筐水果, 一只猴子从 D 处向上爬到树顶 A 处, 利用滑绳 AC 滑到 C 处, 另一只猴子从 D 处滑到地面 B 处, 再由 B 处跑到 C 处, 已知两只猴子所经过的路程都是 15 m.

(1) 设树高 $AB=x$ m, 则 $AD=$ _____ m,

$AC=$ _____ m;

(2) 求树高 AB .

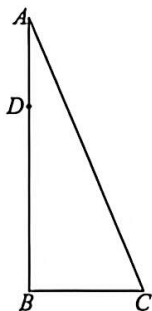


图 1-ZT-3

► 题型二 双勾股

方法点睛

当两个直角三角形有一条公共边时, 利用两次勾股定理列方程.

如图 1-ZT-4, $AC^2 - CD^2 = AD^2 = AB^2 - BD^2$.

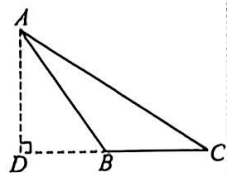


图 1-ZT-4

3. 如图 1-ZT-5, 用两根木棒 AC, AD 加固小树, 木棒 AC, AD 与小树在同一平面内, 且小树与地面垂直, 点 B, C, D 在地面的同一水平线上, $AD=2$ m, $AC=1.3$ m, $CD=2.1$ m, 则 AB 的高度为_____ m.



图 1-ZT-5

4. 如图 1-ZT-6, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $CD \perp AB$ 于点 D , $CD=4$, $BD=3$, 求 AD 的长.

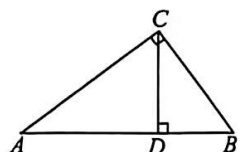


图 1-ZT-6

5. 如图 1-ZT-7, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC=4$, $AC=13$, $AB=15$, 求 $S_{\triangle ABC}$.

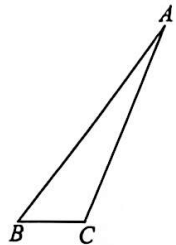


图 1-ZT-7

专题训练(二) 利用勾股定理解决折叠问题

典例呈现

(2025 咸阳阳启中学期中) 如图 2-ZT-1, 长方形 $ABCD$ 中, $AB=4$ cm, $AD=12$ cm, 将此长方形折叠, 使点 B 与点 D 重合, 折痕为 EF , 则 AE 的长为_____.

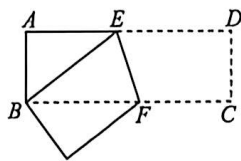


图 2-ZT-1

思路归纳

第一步: 根据折叠, 可以得出相等的线段: $BE=$ _____;
 第二步: 观察图形, 可以发现, 已知条件组成了直角三角形 _____ 的三条边;
 第三步: 结合勾股定理, 可以得到 $AB^2 +$ _____ = _____;
 第四步: 根据等量关系中的量, 找数据或设未知数列方程.

针对训练

1. 如图 2-ZT-2 所示, 有一块直角三角形纸片 ABC , $\angle ACB=90^\circ$, $AC=4$ cm, $BC=3$ cm, 将斜边 AB 翻折, 使点 B 落在直角边 AC 的延长线上的点 E 处, 折痕为 AD , 则 CD 的长为 ()

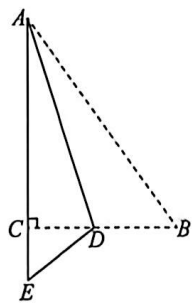


图 2-ZT-2

- A. $\frac{4}{3}$ cm B. $\frac{5}{3}$ cm C. 2 cm D. 3 cm
2. 如图 2-ZT-3, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB=9$, $BC=6$, $\angle B=90^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 折叠, 使点 A 与 BC 边的中点 D 重合, 折痕为 MN , 则线段 BN 的长为 ()
- A. 4 B. 3 C. 2 D. 5

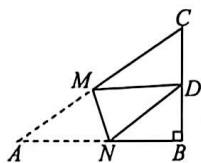


图 2-ZT-3

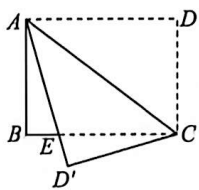


图 2-ZT-4

3. 如图 2-ZT-4, 在长方形 $ABCD$ 中, $AB=3$ cm, $BC=4$ cm. 将长方形沿对角线 AC 折

叠, 点 D 落在点 D' 的位置, AD' 与 BC 相交于点 E , 则 BE 的长为 ()

- A. $\frac{7}{8}$ cm B. $\frac{3}{4}$ cm
 C. $\frac{2}{3}$ cm D. $\frac{5}{6}$ cm

4. (2025 西安交大附中月考) 明明同学在帮妹妹完成折纸手工作业的时候, 发现其中蕴含着数学问题: 如图 2-ZT-5, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=4$, $AC=6$, 沿过点 A 的直线折叠, 使点 B 落在 BC 边上的点 D 处, 再次折叠, 使点 C 与点 D 重合, 折痕交 AC 于点 E , 则 AE 的长为_____.

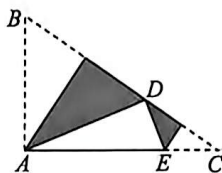


图 2-ZT-5

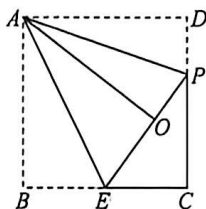


图 2-ZT-6

5. 如图 2-ZT-6, E, P 分别是正方形 $ABCD$ 的边 BC, CD 上的动点, 沿 AE, AP 折叠正方形, 点 B, D 恰好都落在点 O 处, 若 $AB=3$, P 是 CD 边的三等分点, 则 BE 的长为_____.
6. 如图 2-ZT-7, 长方形纸片 $ABCD$ 中, $AB=10$, $AD=8$, 点 P 在 AD 边上, 将 $\triangle CDP$ 沿 CP 折叠, 使点 D 落在点 E 处, PE, CE 分别交 AB 于点 O, F , 且 $OP=OF$, 则 BF 的长为_____.

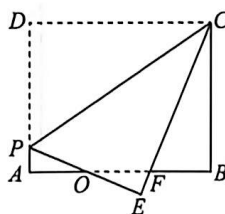


图 2-ZT-7

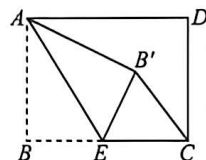


图 2-ZT-8

7. 如图 2-ZT-8, 长方形 $ABCD$ 中, $AB=3$, $BC=4$, E 是 BC 边上一点, 连接 AE , 将长方形沿 AE 折叠, 使点 B 落在点 B' 处, 当 $\triangle CEB'$ 为直角三角形时, BE 的长为_____.

策略理解

一、以前研究过哪些最短路径问题？想一想，并解决下面题目。

1. 如图 1-S-1, 在 $\triangle ABC$ 中, 有一点 P 在线段 AC 上移动. 若 $AB=AC=5, BC=6$, 则 BP 的最小值为 ()

A. 4.8

B. 5

C. 4

D. 6

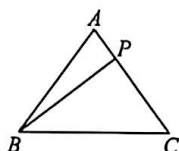


图 1-S-1

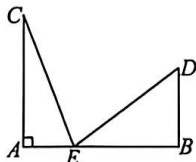


图 1-S-2

2. 如图 1-S-2, $CA \parallel BD, CA \perp AB, AC=5, BD=3, AB=6, E$ 是 AB 上一动点, 则 $CE+DE$ 的最小值为 _____.

二、通过平面几何中的最短路径问题, 反思如何解决立体几何中的最短路径问题.

例 (教材问题变式) 如图 1-S-3, 已知圆柱底面圆的周长为 16 cm, 圆柱高 AC 为 6 cm, BC 为底面圆的直径, 一只蚂蚁从圆柱底部点 B 沿侧面爬到顶部点 A 的最短路程为 ()

A. 4 cm

B. 5 cm

C. 6 cm

D. 10 cm

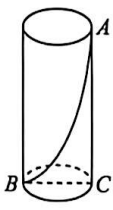


图 1-S-3

变式一: 改变终点的位置

3. 如图 1-S-4, 已知圆柱的底面圆的直径 AB 为 4 cm, 圆柱的高为 10 cm, 在圆柱表面的高 BC 上有一点 D , 且 $CD=2$ cm. 一只蚂蚁从点 A 出发, 求沿着圆柱体的表面爬行到点 D 的最短路程. (π 取 3)

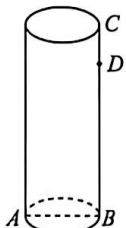


图 1-S-4

变式二: 将圆柱换成长方体

4. 如图 1-S-5 是一个长方体包装盒, 高为 5 cm, 底面是正方形, 边长为 6 cm, 现需用绳子装饰, 绳子从点 A 出发, 沿长方体侧面绕到点 C 处, 求绳子的最短长度.

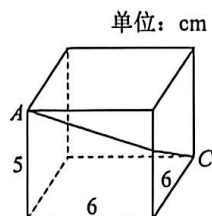


图 1-S-5

5. 如图 1-S-6, 长方体的高为 9 dm, 底面是边长为 6 dm 的正方形. 一只蚂蚁从顶点 A 开始沿着表面爬向顶点 B , 那么它爬行的最短路程为 ()

A. 10 dm

B. 12 dm

C. 15 dm

D. 20 dm

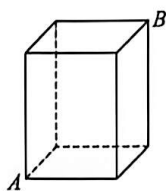


图 1-S-6

策略应用

三、生活中还有哪些现实问题涉及几何体表面上的最短路径？举几个实例，并思考解决问题的方案。

6. 如图 1-S-7, 在底面周长约为 6 米的圆柱形石柱上, 有一条雕龙从柱底沿立柱表面盘绕 2 圈到达柱顶正上方 (从点 A 到点 C , 经过 AC 的中点 B), 这根石柱刻有雕龙的部分的柱身高约 16 米, 则雕刻在石柱上的巨龙至少为 _____ 米.

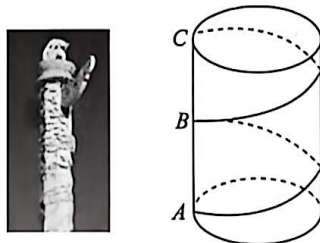


图 1-S-7

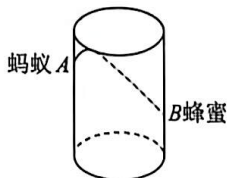


图 1-S-8

7. 如图 1-S-8, 圆柱体玻璃杯的高为 17 cm, 底面周长为 16 cm, 在杯内壁离杯底 6.5 cm 的点 B 处有一滴蜂蜜, 此时一只蚂蚁正好在杯外壁, 离杯上沿 4.5 cm 且与蜂蜜相对的点 A 处, 则蚂蚁从外壁 A 处到内壁 B 处的最短路程为 _____ cm. (杯壁厚度不计)

8. 如图 1-S-9, 学校实验楼前一个三级台阶, 它的每一级的长、宽、高分别为 24 dm, 3 dm, 3 dm, 点 M 和点 N 是这个台阶上两个相对的端点, 点 M 处有一只蚂蚁, 想到点 N 处去吃可口的食物, 则蚂蚁沿着台阶面爬行到点 N 的最短路程为 _____ dm.

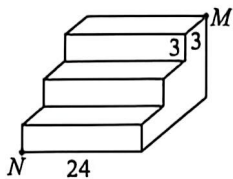


图 1-S-9

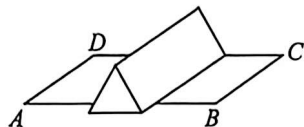


图 1-S-10

9. 在一个长为 12 米, 宽为 8 米的长方形草地上, 如图 1-S-10 放着一根直三棱柱木块, 它的侧棱平行且大于场地宽 AD , 从正面看是边长为 3 米的等边三角形, 一只蚂蚁从点 A 处到点 C 处需要走的最短路程是 _____ 米.
10. 如图 1-S-11, 这是一个供滑板爱好者使用的 U 池的示意图, 该 U 池可以看成是长方体去掉一个“半圆柱”而成, 中间可供滑行部分的截面是直径为 $\frac{40}{\pi}$ m 的半圆, 其边缘 $AB = CD = 20$ m, 点 E 在 CD 上, $CE = 5$ m, 一滑板爱好者从 A 点滑到 E 点, 求他滑行的最短路程.

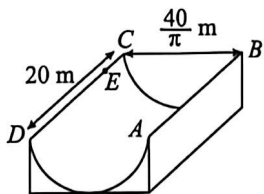


图 1-S-11

反思迁移

11. 阅读思考: 一个长方形的周长为 24, 求这个长方形的面积的最大值.

夏明进行了如下的思考:

设长方形的一边长为 a , 与其相邻的另一边长为 b , 面积为 S , 则 $a + b = 12$.

当 $a = 1, b = 11$ 时, $S = ab = 11$;

当 $a = 2, b = 10$ 时, $S = ab = 20$;

当 $a = 3, b = 9$ 时, $S = ab = 27$;

.....

由此夏明进行了大胆推测:

当 a 和 b 相等 (即 $a = b = 6$) 时, $S = ab = 36$ 最大.

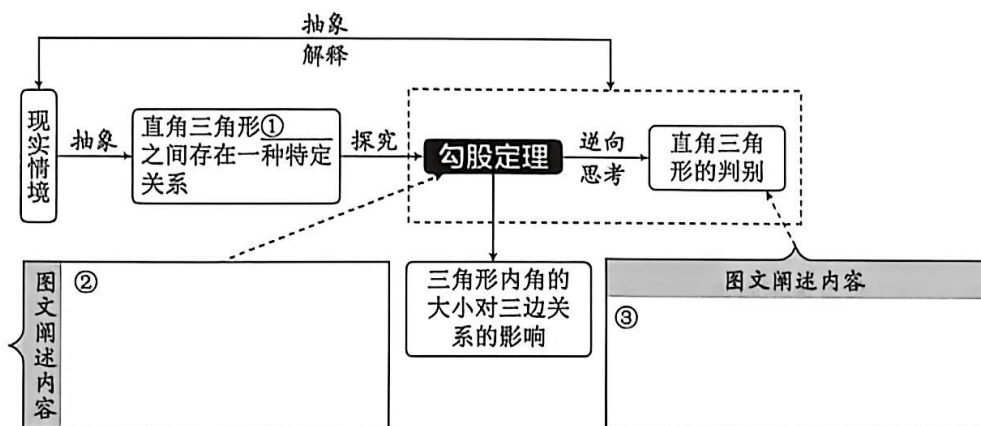
这是因为对于给定的周长, 当长方形是正方形时, 它的面积最大.

据此, 请完成以下问题:

(1) 两个正数的和为 20, 它们积的最大值是 _____;

(2) 一个直角三角形的两条直角边长之和为 10 cm, 求这个直角三角形的面积的最大值.

Q 知识结构关系



Q 核心要点回顾

核心要点一 勾股定理的简单运用

- 如图 1-X-1, 在边长均为 1 的小正方形组成的网格中, 点 A, B 都在格点上, 则线段 AB 的长为 ()
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

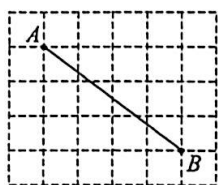


图 1-X-1

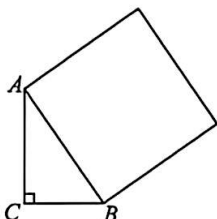


图 1-X-2

- 如图 1-X-2, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 2$, 以 AB 为一条边向三角形外部作正方形, 则正方形的面积是 ()
A. 6 B. 9 C. 13 D. 25
- 如图 1-X-3, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 8$, $BC = 6$, D 为 AC 上一点, 若 BD 是 $\angle ABC$ 的平分线, 则 $AD =$ _____.

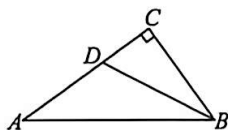


图 1-X-3

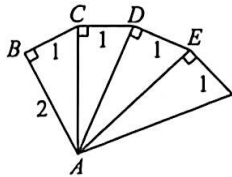


图 1-X-4

- 如图 1-X-4, $\text{Rt}\triangle ABC$ 的两直角边长分别为 1, 2, 以 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 AC 为一直角边, 另一直角边 CD 长为 1 画第 2 个 $\text{Rt}\triangle ACD$; 再以 $\text{Rt}\triangle ACD$ 的斜边 AD 为一直角边, 另一直

角边 DE 长为 1 画第 3 个 $\text{Rt}\triangle ADE$ ……以此类推, 第 6 个直角三角形的斜边长的平方是 _____.

- 如图 1-X-5, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $BD \perp AC$ 于点 D, E 是 AC 上一点, 且 $DE = DA$. 若 $AB = 15$, $BC = 20$.

- 求 BD 的长;
- 求 EC 的长.

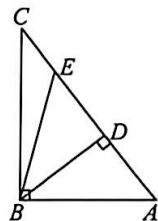


图 1-X-5

核心要点二 勾股定理的验证

- 将两个全等的 $\text{Rt}\triangle ABE$ 和 $\text{Rt}\triangle DEC$ 如图 1-X-6 所示摆放, 使点 A, E, D 在同一条直线上, $\angle A = \angle D = 90^\circ$, 即可借助此图形来说明 $a^2 + b^2 = c^2$. 请写出说明过程.

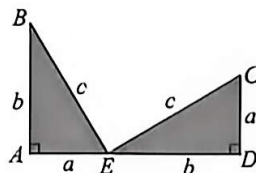


图 1-X-6

核心要点三 直角三角形的判别

7. 如图 1-X-7, 网格中小正方形的边长均为 1, 点 A, B, O 都在格点上, 则 $\angle AOB$ 的度数为 ()
A. 90° B. 60° C. 45° D. 30°

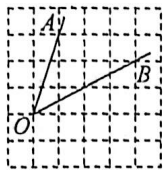


图 1-X-7

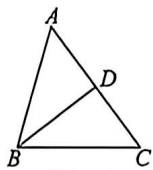


图 1-X-8

8. 如图 1-X-8, BD 为 $\triangle ABC$ 的中线, $AB = 10$, $AD = 6$, $BD = 8$, 则 $\triangle ABC$ 的面积是 _____.

核心要点四 勾股定理的应用

9. (2025 西安铁一中期末) 如图 1-X-9, 小巷左右两侧是竖直的墙, 一架梯子斜靠在左墙时, 梯子底端到左墙脚的距离为 0.7 m, 顶端距离地面 2.4 m. 若保持梯子底端位置不动, 将梯子斜靠在右墙时, 顶端距离地面 2 m, 则小巷的宽度为 ()
A. 0.7 m B. 1.5 m C. 2.2 m D. 2.4 m

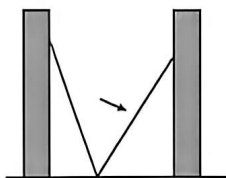


图 1-X-9



图 1-X-10

10. 如图 1-X-10, 圆柱的底面周长为 32 cm, 高为 24 cm, 从圆柱底部 A 处沿侧面缠绕一圈丝线到顶部 B 处做装饰 (点 B 在点 A 的正上方), 则这条丝线的最小长度为 _____ cm.
11. 一个零件的形状如图 1-X-11, 按规定这个零件中 $\angle A$ 和 $\angle C$ 都应该是直角. 工人师傅测得这个零件各边尺寸 (单位: cm) 如图所示, 这个零件符合要求吗? 请说明理由.

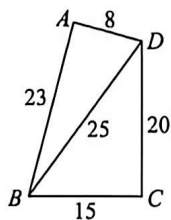


图 1-X-11

12. 如图 1-X-12, 地面上放着一个小板凳 (AB 与地面平行), 点 A 到墙面 (墙面与地面垂直) 的距离为 40 cm. 在图①中, 一木杆的一端与墙角 O 重合, 另一端靠在点 A 处, $OA = 50$ cm.
- (1) 求小板凳的高度;
- (2) 如图②, 另一木杆的一端与点 B 重合, 另一端靠在墙上的点 C 处. 若 $OC = 90$ cm, 木杆 BC 比小板凳的宽 AB 长 60 cm, 求小板凳的宽 AB 和木杆 BC 的长度.

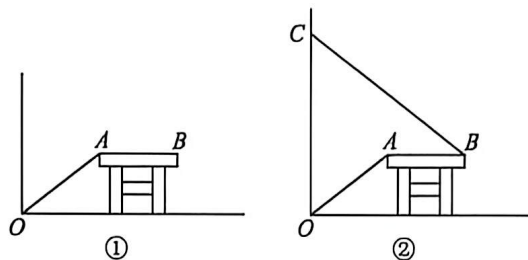


图 1-X-12