

分类号_____

学号 0811241225

西安建筑科技大学 学 位 论 文

微积分方程的小波数值解

作者 马晓蒂

指导教师姓名 石智 教授

申请学位级别 硕士 专业名称 应用数学

论文提交日期 2011. 04 论文答辩日期 2011. 05

学位授予单位 西安建筑科技大学

答辩委员会主席 曹怀信

评 阅 人 曹怀信

陈清江

声 明

本人郑重声明我所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中已经标明引用的内容外，本论文不包含其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果，也不包含本人或其他人在其它单位已申请学位或为其它用途使用过的成果。与我一同工作的同志对本研究所做的所有贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了致谢。

申请学位论文与资料若有不实之处，本人承担一切相关责任。

论文作者签名：马晓蒂

日期：2011.5.10

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解西安建筑科技大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关部门或机构送交学位论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅；学校可以公布学位论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或者其它复制手段保存学位论文。

（保密的论文在论文解密后应遵守此规定）

论文作者签名：马晓蒂

指导教师签名：王 芳

日期：2011.4.20

本人授权中国学术期刊（光盘版）杂志社将本学位论文收录到有关“学位论文数据库”之中，并通过网络向社会公众提供信息服务。同意论文提交后滞后：☐半年；☐一年；☐二年发布。

论文作者签名：马晓蒂

指导教师签名：王 芳

日期：2011.4.20

微积分方程的小波数值解

专 业：应用数学

硕 士 生：马晓蒂

指导教师：石 智教授

摘 要

小波分析是当前数学中一个迅速发展的新领域, 在数值分析、信号处理、图像处理、量子场论等众多领域中有着广泛的应用. 微积分方程的理论和数值解是数学学科的研究方向, 起源于物理问题, 是描述物理问题的重要数学工具, 静电学、弹性力学、电磁场理论、辐射学等学科中, 许多数学问题的解决可化为求解对应的微积分方程. 小波具有正则性、消失矩、短支集等特点使得小波在化简方程时形成稀疏矩阵, 给数值计算带来快速有效的方法.

本文首先介绍了小波分析的背景、早期小波发展以及当前小波应用研究工作的方向, 同时介绍了全文的组织结构. 从 Fourier 分析开始, 介绍了小波分析的基本理论, 包括小波的本质, 连续小波变换, 离散小波变换, 多分辨分析, 尺度函数与小波函数的构造等内容.

其次介绍了积分方程和微分方程的历史、分类、常用的数值算法以及近年来小波数值解在微积分方程中的应用.

最后研究了应用 Haar 小波数值法, 求解线性与非线性 Fredholm 积分方程以及应用 Shannon 小波函数逼近法求解微分方程的初边值问题, 实验算例表明了 Haar 小波数值法的高精度及 Shannon 小波函数逼近法的有效性.

关键词: 微分方程; 积分方程; Haar 小波; Shannon 小波; 配置法

Wavelet Numerical Method for Solving Differential and Integral Equations

Speciality: Applied Mathematics

Name: Ma Xiaodi

Instructor: Professor Shi Zhi

ABSTRACT

Wavelet analysis is a new field of current mathematics, which has been rapidly developed and has a wide range of applications in numerical analysis, signal processing, graphics, quantum field and many other areas. Differential and integral equations and their numerical solutions are very important subjects of mathematical research, and come from their physical problems, and are used as an important mathematical tool in physical problem, electrostatics, elasticity, electromagnetic theory, radiation science and other subjects, so that mathematical problems can be reduced to solving the corresponding integral equations. Wavelets with regularity, vanishing moments, short sets and other features can make the simplified equation to form matrix, and then to be solved with a quick and efficient numerical method.

In the first part of this paper, we introduce the background and development of wavelet analysis, and early researches on the current direction of wavelet applications, also introduce the organizational structure of this paper. Starting from the Fourier analysis, we introduce the basic theory of wavelet analysis, including the properties of wavelets, continuous wavelet transform, discrete wavelet transform, multiresolution analysis, scaling function and wavelet function and so on, which serve as a theoretical foundation of the paper.

And then, we introduce the history of the differential and integral equations, classification, numerical algorithms and applications of wavelets in solving differential and integral equations.

Finally, the Haar wavelet collocation method are used to solve linear and nonlinear Fredholm integral equations, and Shannon wavelet are used to solve differential equations of initial boundary value problems. Experimental examples show the high-precision of numerical method of Haar wavelet and the effectivity of Shannon wavelet function approximation method.

Keywords: differential equation; integral equation; Haar wavelet; Shannon wavelet;
collocation method

目 录

1. 绪论	1
1.1 引言	1
1.2 早期小波发展的回顾	1
1.3 当前小波应用研究工作	2
1.4 本文的组织结构	2
2. 小波变换	4
2.1 Fourier 分析	4
2.1.1 Fourier 级数	4
2.1.2 Fourier 变换	6
2.2 小波分析简介及小波变换	7
2.2.1 小波的本质	7
2.2.2 小波分析简介	9
2.2.3 连续小波变换	9
2.2.4 离散小波变换	11
2.2.5 多分辨率分析	12
2.2.6 小波的分解和重构	15
2.3 本章小结	16
3. 积分方程与微分方程简介	17
3.1 积分方程	17
3.1.1 积分方程简介	17
3.1.2 积分方程的分类	18
3.1.3 积分方程常用解法	19
3.2 微分方程	23
3.2.1 微分方程简介	23
3.2.2 微分方程的分类	24
3.2.3 常微分方程常用解法	24
3.3 小波数值解应用于微积分方程的研究进展	25
3.4 本章小结	26
4. Haar 小波方法	27
4.1 Haar 小波的定义及其相关的性质	27

4.1.1 Haar 尺度函数	27
4.1.2 Haar 小波函数	27
4.2 积分方程的 Haar 小波数值解法	28
4.2.1 函数逼近	28
4.2.2 Haar 小波的积分算子矩阵	29
4.2.3 线性与非线性积分方程的 Haar 小波方法	30
4.3 算例实验	34
4.4 本章小结	36
5. Shannon 小波方法	37
5.1 Shannon 尺度函数与 Shannon 小波函数	37
5.2 Shannon 尺度函数与 Shannon 小波函数的相关系数	39
5.3 微分方程初边值问题的 Shannon 小波解	41
5.4 本章小结	45
6. 结论	46
致谢	47
参考文献	48
作者在读研期间的研究成果	52

主要符号表

符号	意义
$\hat{f}(\omega)$	函数 $f(x)$ 的傅里叶变换
$L^1(\mathbf{R})$	定义在 $\mathbf{R}$ 上所有绝对可积函数组成的空间, $L^1(\mathbf{R}) = \left\{ f(x) \left \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx < +\infty, x \in \mathbf{R} \right. \right\}$
$L^2(\mathbf{R})$	定义在 $\mathbf{R}$ 上所有平方可积函数组成的空间, $L^2(\mathbf{R}) = \left\{ f(x) \left \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) ^2 dx < +\infty, x \in \mathbf{R} \right. \right\}$
$\mathbf{N}$	自然数集, $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$
$\mathbf{R}$	实数集, $\mathbf{R} = \{x -\infty < x < +\infty\}$
$\mathbf{Z}$	整数集, $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$
$\psi(x)$	小波函数
$\phi(x)$	尺度函数

1. 绪论

1.1 引言^[1]

小波分析是近年来国际上一个非常热门的前沿研究领域,是继 Fourier 分析之后的一个突破性进展,它给许多相关领域带来了崭新的思想,提供了强有力的工具,在科技界引起了广泛的关注和高度的重视.它既包含有丰富的数学理论,又是工程应用中强有力的方法和工具.小波分析的发展推动着许多其它学科和领域的发展,使得其本身具有了多学科相互结合、相互渗透的特点.探讨小波的新理论、新方法和新应用已成为当前数学界和工程界一个非常活跃和富有挑战性的研究领域.

所谓小波分析,从数学角度看,它属于调和分析范畴,从事计算数学的工作者把它看作是一种近似计算的方法,用于把某一函数在特定空间内按照小波基展开和逼近;从工程角度看,小波分析是一种信号与信息处理的工具,是继 Fourier 分析之后的又一有效的时频分析方法.小波变换作为一种新的多分辨分析方法,可同时进行时域和频域分析,具有时频局部化和多分辨特性,因此特别适合于处理非平稳信号.

在小波分析中,利用小波基取代传统的三角函数基,对函数进行分析和研究.由于小波基是由一个小波函数 $\psi(x)$ ($\psi(x)$ 充分光滑、快速衰减、具有振动、状如小波) 经过平移和伸缩得到的,因此具有更简单、灵活、随意的特性,又具有多分辨分析的功能.它为诸多应用领域提供了一种新的更为优越、更为方便的分析工具.

与 Fourier 分析类似,小波分析中也存在积分小波变换、小波级数和离散小波变换.与 Fourier 变换相比,小波分析是一个时间和频率的局域变换,因而能有效地从信号中提取信息,通过伸缩和平移等运算功能对函数或信号进行尺度细化分析,解决了 Fourier 变换不能解决的许多困难问题.两者的本质区别在于:Fourier 分析只是考虑时域和频域之间一对一映射,它以单个变量(时间或者频率)的函数表示信号;小波分析则利用联合时间-尺度函数分析非平稳信号,从根本上克服了 Fourier 分析只能以单一变量描述信号的缺点.小波分析与时频分析的区别在于:时频分析在时频平面上表示非平稳信号;小波分析描述非平稳信号不是在时频平面上,而是在所谓的时间-尺度平面上.在小波分析中,人们以不同的尺度(或者分辨率)来观察信号.信号分析的这种多尺度(或者多分辨率)的观点是小波分析的基本点.

1.2 早期小波发展的回顾^[1]

小波的起源可以追溯到 20 世纪初.

1910 年 Haar 提出了正交函数系—Haar 函数系,这是后来的一阶 Daubechies 小波

函数.

1936 年 Littlewood 和 Paley 提出对频率按 2^j 进行划分, 构造了 Littlewood-Paley 基, 这为小波后来的发展奠定了理论基础.

1981 年法国地质物理学家 Morlet 首先提出了小波分析的概念.

1984 年 Morlet 和 Grossman 对地质信号的分解提出了伸缩、平移的概念, 第一次提出 “wavelet” 一词.

1988 年 Mallat 和 Meyer 合作提出了多分辨分析的框架.

1988 年 Daubechies 构造了具有紧支集的有限光滑小波函数, 在美国 Pure.Appl.Maths 发表了一篇长达 87 页的论文, 被公认是小波分析的经典的纲领性文献.

1990 年崔锦泰和王建忠构造了基于样条函数的单正交小波.

1990 年 Meyer 等出版了第一部小波系统性专著《小波与算子》, 共三卷. 这套书详细研究了各种小波基的构造, 小波基与函数空间的关系, Calderson 算子在小波基上的表现以及小波分析在复分析、算子论、偏微分方程与非线性分析等方面的应用.

1990 年 Latto 和 Tenenbaum 将小波分析用于偏微分方程数值解.

1.3 当前小波应用研究工作

在小波理论发展的同时, 小波应用的研究工作也在不断地开展, 主要集中在以下四个方面:

(1) 小波在数学其它分支中的应用, 如求微分方程、积分方程、函数逼近、分形、混沌问题、概率小波、非线性分析等.

(2) 小波在信号处理中的应用, 包括信号检测、目标识别以及去噪等, 比如语言信号、雷达信号、医学信号、天文信号、地震信号、机械故障信号等.

(3) 小波在图像处理中的应用, 其中包括图像数据压缩、去噪、数字水印、指纹鉴别、模式识别等.

(4) 小波在通信中的应用, 如在 CDMA、自适应均衡、扩频通信和分形调制等.

1.4 本文组织结构

本文共分五章, 每章主要内容如下:

第 1 章绪论, 介绍了小波分析的历史背景、对早期的小波分析发展进行了回顾并指出当前小波分析应用研究的工作方向.

第 2 章小波变换, 从 Fourier 分析开始, 介绍了小波分析的基本理论, 包括小波的本质、连续小波变换、离散小波变换、多分辨分析、小波的分解与重构等内容, 本章是

全文理论的依据.

第 3 章简介了积分方程和微分方程的历史、分类、常用的数值算法以及近年来小波数值解在微积分方程中的应用.

第 4 章研究了 Haar 小波族, Haar 小波积分矩阵算子, 函数逼近, 并运用 Haar 小波配置点法求解第二类 Fredholm 积分方程, 实验算例表明该方法的高精度.

第 5 章研究了 Shannon 小波族, Shannon 尺度函数和小波函数的系数算法, 并运用 Shannon 小波函数逼近法求解微分方程初边值问题, 实验算例表明该方法的有效性.

2. 小波变换

2.1 Fourier 分析

Fourier 分析包括 Fourier 级数和 Fourier 变换两个方面.

2.1.1 Fourier 级数

设 $f(x)$ 是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的以 2π 为周期的函数, 即 $f(x) = f(x + 2\pi)$, 且在 $(0, 2\pi)$ 上平方可积, 即有

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty,$$

其中 $|f(x)|^2 = f(x)\overline{f(x)}$, 而 $\overline{f(x)}$ 是函数 $f(x)$ 的共轭函数. 一般情况下, 我们考虑复值函数, 实值函数可看做复值函数的特殊情况. 如果 $f(x)$ 是实值函数, 则有 $f(x) = \overline{f(x)}$.

我们用 $L^2(0, 2\pi)$ 表示在实数集 $\mathbf{R}$ 上以 2π 为周期且在 $(0, 2\pi)$ 上平方可积函数的全体. 类似地, 我们也可以定义函数空间 $L^1(0, 2\pi)$ 为实数集 $\mathbf{R}$ 上以 2π 为周期且在 $(0, 2\pi)$ 上绝对可积函数的全体. 可以证明, 函数空间 $L^2(0, 2\pi)$ 是 $L^1(0, 2\pi)$ 的子集, 即 $L^2(0, 2\pi) \subset L^1(0, 2\pi)$. 由于 $L^2(0, 2\pi)$ (实际上它是一个 Hilbert 空间) 具有许多良好的性质, 而且在实际应用中遇到的以 2π 为周期的函数, 一般都属于 $L^2(0, 2\pi)$, 同时一般的周期函数也可以变换为以 2π 为周期的函数, 因此我们只讨论 $L^2(0, 2\pi)$ 空间的函数.

在 $L^2(0, 2\pi)$ 中定义内积为

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)} dx.$$

对于 $f, g \in L^2(0, 2\pi)$, 如果 $\langle f, g \rangle = 0$, 则称 f, g 是正交的, 并记作 $f \perp g$.

在 $L^2(0, 2\pi)$ 中定义范数为

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

下面给出 $L^2(0, 2\pi)$ 空间上的一些主要结论.

定理 2.1^[2] 对于任意 $f, g \in L^2(0, 2\pi)$, 有 Schwarz 不等式

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|,$$

以及三角不等式

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

成立.

由于 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, 通过计算可知 $\forall k, n \in \mathbf{Z}$

$$\langle e^{ikx}, e^{inx} \rangle = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ 1, & k = n. \end{cases}$$

所以函数系 $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 是标准正交系. 进一步有以下定理.

定理 2.2^[2] 函数系 $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 是 $L^2(0, 2\pi)$ 的标准正交基, 即对任意 $f \in L^2(0, 2\pi)$, 有

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \quad (2-1)$$

其中

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

我们称 c_k 为 Fourier 系数, 称 (2-1) 式的右端是 $f(x)$ 的 Fourier 级数.

需要指出的是, 在公式 (2-1) 中, 两端相等是几乎处处相等, 而且级数的收敛是指在 $L^2(0, 2\pi)$ 中按下式收敛

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-M}^N c_k e^{ikx} \right|^2 dx = 0.$$

即平方平均收敛.

如果对 $L^2(0, 2\pi)$ 中的函数再加上一定的条件, 还可得到其他的收敛形式.

定理 2.3^[2] 设 $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上连续且分段光滑, 则它的 Fourier 级数一致收敛于 $f(x)$.

对于函数及其 Fourier 系数还有一个重要的关系式, 即定理 2.4.

定理 2.4^[2] 对于公式 (2-1) 中的 $f(x)$ 和 $\{c_k\}$, 有 Parseval 恒等式

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \quad (2-2)$$

成立.

在实际应用中, 各种信号可看作时间的函数, 而各种周期函数表示. 我们知道, 基函数 e^{ikx} 是一个“正弦波”, 而且 k 越大, 频率就越高, 所以可以将一个周期为 2π 的信号(函数)按 (2-1) 式分解成各种频率的正弦波 (e^{ikx}) 之和, 然后根据不同的需要进行不同的处理.

2.1.2 Fourier 变换

我们知道, 如果一个函数定义在某个有限区间上, 可将该区间变换到 $[0, 2\pi]$, 并将这个函数周期化, 变成实数集 $\mathbf{R}$ 上的周期函数. 然而, 在各种问题中常出现定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的非周期函数, 例如 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g(x) = e^{-x^2}$ 等, 这些函数不能展开成 Fourier 级数.

令 $L^2(\mathbf{R})$ 是由所有满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty$$

的函数组成的集合.

在 $L^2(\mathbf{R})$ 中定义范数为

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, $f(x)$ 的 Fourier 变换定义为

$$F[f(x)] = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} d\omega. \quad (2-3)$$

$\hat{f}(\omega)$ 的 Fourier 逆变换定义为

$$F^{-1}[\hat{f}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega x} d\omega. \quad (2-4)$$

下面介绍 Fourier 变换的一些主要结论

定理 2.5^[2] 对任意 $f \in L^2(\mathbf{R})$, 有 $\hat{f}(\omega) \in L^2(\mathbf{R})$, 并且

$$f(x) = F^{-1}[\hat{f}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega x} d\omega, \quad (2-5)$$

对于 $f(x), g(x) \in L^2(\mathbf{R})$ 定义内积如下:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)} dx, \quad (2-6)$$

则对前面定义的范数, 有

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \langle f, f \rangle^{1/2}. \quad (2-7)$$

定理 2.6^[2] 对于任意 $f(x), g(x) \in L^2(\mathbf{R})$, 有 Parseval 恒等式成立

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle.$$

特别地, $\|f\| = (2\pi)^{-1/2} \|\hat{f}\|_2$.

定理 2.7^[2] 设 $f(x) \in L^1(\mathbf{R})$, 则有

- (1) $|\hat{f}(x)| \leq \|f\|_1, x \in \mathbf{R}$;
- (2) $\hat{f}(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致连续;
- (3) 如果 f 的导数 f' 也存在并且属于 $L^1(\mathbf{R})$, 则

$$F[f'(x)] = i\omega \hat{f}(\omega);$$

- (4) 如果 $xf(x) \in L^1(\mathbf{R})$, 则 $\hat{f}(\omega)$ 可微, 并且

$$[f'(\omega)] = F[-ixf(x)];$$

- (5) 当 $\omega \rightarrow -\infty$ 或 $\omega \rightarrow +\infty$ 时, $f'(\omega) \rightarrow 0$;

设 $f(x), g(x) \in L^1(\mathbf{R})$, f 与 g 的卷积定义为

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx.$$

显然有 $f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$.

定理 2.8^[2] 设 $f, g \in L^1(\mathbf{R})$, 则 $f * g \in L^1(\mathbf{R})$, 并且有

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 * \|g\|_1, \quad (2-8)$$

以及

$$F[f(x) * g(x)] = \hat{f}(x) * \hat{g}(x). \quad (2-9)$$

以上我们介绍了 Fourier 变换的一些主要性质. Fourier 变换能较好地刻画信号的频率特性, 但不能提供信号在时频上的任何局部信息. 利用 Fourier 变换研究信号的频域特性时, 必须获得该信号在时域中的全部信息. 给定一个信号 $f(x)$, 在许多情况下令人感兴趣的是信号局部范围内的特性, 然而如果通过 Fourier 变换, 信号的时域信息丢失了, 就很难知道事件发生的确切时间. 小波变换解决了 Fourier 变换的时域和频域局部化的矛盾.

2.2 小波分析简介及小波变换

2.2.1 小波的本质

什么是小波? 简单的讲, 小波是一个有始有终的小的“波浪”, 一个小的波本质上生成和衰减于一个有限的时间周期内. 为了量化小波的概念, 让我们先考虑定义在整个实数轴 $(-\infty, +\infty)$ 上的满足下面两个基本性质的实数 $\psi(x)$:

(1) $\psi(x)$ 的积分等于零:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 0, \quad (2-10)$$

(2) $\psi(x)$ 的平方积分等于 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(x) dx = 1. \quad (2-11)$$

如果等式 (2-11) 成立, 那么对于任何满足 $0 < \varepsilon < 1$ 的 ε , 一定存在一个区间 $[-T, +T]$, 使

$$\int_{-T}^{+T} \psi^2(x) dx > 1 - \varepsilon.$$

如果把 ε 看做非常接近于 0, 那么 $\psi(x)$ 在 $[-T, +T]$ 外仅仅是显著地偏离零. 它的非零变动范围主要限制于一个有限的区间 $[-T, +T]$. 因为区间 $[-T, +T]$ 的长度和整个实轴的长度比较起来非常小, 因此可以认为 ε 的非零变动范围限制在一个相对较小的时间区间上. 等式 (2-11) 说明 ε 相对于零必定有一些偏离, 然而等式 (2-10) 告诉我们大于零的偏移必须被小于零的偏移所抵消, 因此 $\psi(x)$ 像一个波. 所以等式 (2-10) 和等式 (2-11) 导致了“小的波”或者小波.

例 1^[4] 哈尔 (Haar) 小波

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq x < 1, \\ 0, & \text{others.} \end{cases}$$

Haar 小波的结构简单, 但它不是连续函数, 因而限制了它的应用, 第四章 Haar 小波分析具体介绍.

例 2^[4] 香农 (Shannon) 小波

$$\psi(x) = \frac{\sin(2\pi x) - \sin(\pi x)}{\pi x}.$$

Shannon 正交小波有无穷消失矩. 第五章 Shannon 小波分析具体介绍.

例 3^[4] 墨西哥帽 (Mexican hat) 小波

$$\psi(x) = \frac{2(1 - \frac{x^2}{\sigma^2})e^{-x^2/2\sigma^2}}{\pi^{1/4}\sqrt{3}\sigma}.$$

在实用中要求小波满足“容许性”条件, 见后面的定义 2.2.

2.2.2 小波分析简介

函数集 $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 构成 $L^2(0, 2\pi)$ 的标准正交基, 使 $L^2(0, 2\pi)$ 中的任意函数都能展开成 Fourier 级数. 基函数 e^{ikx} 可看作是基本“建筑块”, 一般的函数可由这些基本建筑块构成, 从而给分析问题带来了方便. 另外, 正交基 $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 是由一个简单函数 $\omega(x) = e^{ik}$ 的“膨胀”形成的, 即 $\omega_k(x) = \omega(kx)$, $k \in \mathbf{Z}$. 由此, 我们可以将 $L^2(0, 2\pi)$ 看作是由单个函数 e^{ik} 生成的空间.

下面先介绍正交小波的概念, 记

$$\psi_{j,n}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - n), \quad j, n \in \mathbf{Z}, \quad (2-12)$$

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \quad j, k \in \mathbf{Z}. \quad (2-13)$$

定义 2.1^[2] 设一个函数 $\psi(x) \in L^2(\mathbf{R})$, 如果函数族 $\{\psi_{j,n}\}_{j,n \in \mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个标准正交基, 即

$$\langle \psi_{j,n}, \psi_{k,m} \rangle = \delta_{j,k} \cdot \delta_{n,m}, \quad j, k, n, m \in \mathbf{Z}, \quad (2-14)$$

则称 $\psi(x)$ 为一个正交小波.

由定义, 如果函数 $\psi(x) \in L^2(\mathbf{R})$ 是一个正交小波, 则函数族 $\{\psi_{j,n}\}_{j,n \in \mathbf{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个标准正交基, 从而对任意函数 $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$, 有如下展开式:

$$f(x) = \sum_{j,n=-\infty}^{+\infty} c_{j,n} \psi_{j,n}(x), \quad (2-15)$$

其中 (2-20) 式中的级数是在 $L^2(\mathbf{R})$ 中收敛的, 即

$$\lim_{J,K,L,M \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{j=-J}^K \sum_{n=-L}^M c_{j,n} \psi_{j,n} \right\| = 0.$$

2.2.3 连续小波变换

首先以时域窗口的数学形式来考虑问题, 也就是说,

$$G_\psi f(\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) \omega(x - b)] e^{-i\omega x} dx, \quad (2-16)$$

先将 $f(x)$ 时域局部化为 $f(x) \omega(x - b)$, 再对开窗后局部时域信号作 Fourier 变换, 在这种观点下, $\omega(x - b)$ 的设计自动适应低、高频信号在时域和频域中的局部表现, 从而出现了时 - 频形状不变的特点.

换一个角度, 即采用形式

$$G_{\psi}f(\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\tilde{\omega}(x-b)} dx. \quad (2-17)$$

其中, $\tilde{\omega}(\omega, x-b) = \omega(x-b)e^{i\omega x}$. 在积分变换的意义下, 既把 $\tilde{\omega}$ 看做变换函数, 又把 $\tilde{\omega}$ 看做对 $f(x)$ 在时域和频域都能起限制作用的窗函数. 基于这种考虑, 不放假设窗函数具有抽象的形式 $\tilde{\omega} = \psi_{a,b}(x)$, 其中

$$\psi_{a,b}(x) = a^{1/2} \psi(ax-b), \quad a \in \mathbf{R}.$$

它是由 $\psi(x)$ 经平移和放缩的结果.

定义 2.2^[4] 如果 $\psi(x) \in L^2(\mathbf{R})$ 满足“容许性”条件:

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty,$$

则称 $\psi(x)$ 是一个基小波. 对 $\psi(x)$ 作伸缩 a 平移 b 可得一族函数:

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

关于每一个基小波 $\psi(x)$, 在 $L^2(\mathbf{R})$ 上的连续小波变换定义为:

$$W_{\psi}f(a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx. \quad (2-18)$$

其中: $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, 则式 (2-18) 可以写为

$$W_{\psi}f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle.$$

在式子 (2-18) 中引入因子 $|a|^{-1/2}$ 的原因是规范化, 使 $\|\psi_{a,b}\|_2 = \|\psi\|_2$ 对于所有 a, b 成立. 假定 $\|\psi\|_2 = 1$, 则有 $|W_{\psi}f(a, b)| \leq \|f\|_2$.

不难发现, 连续小波变换具有如下重要性质:

(1) 线性性: 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的小波变换分别为 $W_{\psi}f(a, b)$ 和 $W_{\psi}g(a, b)$, 则 $k_1f(x) + k_2g(x)$ 的小波变换为 $k_1[W_{\psi}f(a, b)] + k_2[W_{\psi}g(a, b)]$;

(2) 平移不变性: 如果 $f(x)$ 的小波变换为 $W_{\psi}f(a, b)$, 则 $f(x-x_0)$ 的小波变换 $W_{\psi}f(a, b-x_0)$;

(3) 小波变换的时频分辨率依赖于小波 $\psi_{a,b}$ 的时频宽度. 假定 ψ 集中在原点附近, 则 $\psi_{a,b}$ 集中在 $x=b$ 附近. $\sigma_1 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x\psi(x)|^2 dx\right)^{1/2}$, 通过变量替换 $v = \frac{x-b}{a}$ 可得 $\psi_{a,b}$ 的窗函数为

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (x-b)^2 |\psi_{a,b}(x)|^2 dx\right)^{1/2} = |a| \sigma_1,$$

因此, 连续小波 $\psi_{a,b}$ 的时窗是 $[b - |a| \sigma_1, b + |a| \sigma_1]$.

又因为在处理信号中, $\hat{\psi}(x)$ 的负频率为 0, 故 $\hat{\psi}$ 的中心频率为

$$\eta = \int_0^{+\infty} \omega |\hat{\psi}(\omega)| d\omega,$$

频域窗半径为

$$\sigma_\omega = \left(\int_0^{+\infty} (\omega - \eta)^2 |\hat{\psi}(\omega)| d\omega \right)^{1/2}.$$

由于 $\hat{\psi}_{a,b} = \frac{a}{\sqrt{a}} \hat{\psi}(a\omega) e^{-i\omega b}$, 则 $\hat{\psi}_{a,b}$ 的频域窗半径为

$$\left(\int_0^{+\infty} \left(\omega - \frac{\eta}{a} \right)^2 |\hat{\psi}_{a,b}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} = \frac{\sigma_\omega}{|a|}.$$

因此, $\hat{\psi}_{a,b}$ 的频窗是

$$\left[\frac{\eta}{a} - \frac{\sigma_\omega}{|a|}, \frac{\eta}{a} + \frac{\sigma_\omega}{|a|} \right].$$

总之, 连续小波 $\psi_{a,b}(x)$ 的时频窗是

$$[b - |a| \sigma_1, b + |a| \sigma_1] \times \left[\frac{\eta}{a} - \frac{\sigma_\omega}{|a|}, \frac{\eta}{a} + \frac{\sigma_\omega}{|a|} \right].$$

时 - 频窗的面积是

$$2|a| \sigma_t \times \frac{2\sigma_\omega}{|a|} = 4\sigma_t \sigma_\omega.$$

它只与基小波 $\psi(x)$ 有关, 而与参数 (a, b) 毫无关系.

定理 2.9^[4] 令 ψ 是一个基小波, 它定义了一个连续小波变换 W_ψ , 那么,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi g(a, b)}] \frac{da}{a^2} db = C_\psi \langle f, g \rangle$$

对于所有 $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ 成立. 进而, 对任何 $f \in L^2(\mathbf{R})$ 和在 f 连续的点 $x \in \mathbf{R}$, 有

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [W_\psi f(a, b)] \psi_{a,b}(x) \frac{da}{a^2} db.$$

2.2.4 离散小波变换

2.2.3 章节研究了连续小波及连续小波变换. 其中, $\psi_{a,b}(x)$ 中的 a, b 两个变量均为连续变量, 因而称为连续小波. 利用小波 $\psi_{a,b}(x)$, 可得到任意信号 $f(x)$ 的连续小波变换 $W_\psi f(a, b)$, 并且用这些小波变换 $W_\psi f(a, b)$ 可重构原信号 $f(x)$. 然而, 小波变换 $W_\psi f(a, b)$ 是尺度 - 时间平面上的连续函数, 它们之间存在很大的相关性, 因此希望能

够在一些离散尺度或离散位移下计算小波变换,使得在降低小波变换相关性的同时,又不丢失信息,即用这些小波变换仍可以重构信号 $f(x)$. 因此我们可以对 a, b 两个连续变量施加不同的离散化条件,并相应地对小波及小波变换进行分类.

定义 2.3^[1] 在连续小波变换中,令尺度参数和平移参数分别为 $a = 2^{-j}, b = k2^{-j}$, 其中 $j, k \in \mathbf{Z}$, 则离散小波为

$$\psi_{2^{-j}, k2^{-j}}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k).$$

在这种情况下,常用 $\psi_{j,k}(x)$ 记 $\psi_{2^{-j}, k2^{-j}}(x)$.

定义 2.4^[1] 若 $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$, 对应 $\psi_{j,k}(x)$ 的离散小波变换为

$$W_\psi f(j, k) = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = 2^{j/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi(2^{j/2} x - k) dx.$$

可以证明,离散小波变换不具有平移不变性.

在连续小波离散化过程中,若仅对尺度参数进行二进离散,而平移参数仍然连续变化,则得到二进小波.

定义 2.5^[1] 在连续小波变换中,令尺度参数 $a = 2^j, j \in \mathbf{Z}$, 而平移参数 b 仍取连续值,则有二进小波

$$\psi_{2^j, b}(x) = 2^{-j/2} \psi[2^{-j}(x - b)],$$

这时, $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ 的二进小波变换定义为

$$W_\psi f(2^j, b) = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(2^{j/2} x - b) dx.$$

二进小波介于连续小波和离散小波之间,它只是对尺度参数进行离散化,而在时域上仍保持平移量连续变化.因此二进小波变换仍具有连续小波变换的平移不变性,这是它有别于离散小波变换的独特优点.

2.2.5 多分辨分析

1988 年 Mallat 和 Meyer 合作提出了多分辨分析 (Multi-Resolution-Analysis, 简称 MRA) 的框架. 多分辨通过特殊的空间分解,巧妙地构造小波基. 它把全空间 $L^2(\mathbf{R})$ 按分辨率 2^j 先分解成一串嵌套的闭子空间序列 $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$, 然后通过正交补得塔式分解, 再将 $L^2(\mathbf{R})$ 分解成一串正交小波子空间序列 $\{W_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$, 然后, 将 $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ 分别投影分解到不同分辨率的小波子空间序列 $\{W_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 上进行分析和研究. 下面我们给出多分辨分析的定义.

定义 2.6^[6] 设 $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一串闭子空间序列, 如果满足以下五条, 则称 $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 为 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个多分辨分析:

- (1) 单调性: $\cdots V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1} \cdots$;
- (2) 平移不变性: 若 $f(x) \in V_j$, 则 $f(x-k) \in V_j, k \in \mathbf{Z}$;
- (3) 二进制伸缩相关性: 若 $f(x) \in V_j$, 则 $f(2x) \in V_{j+1}, f(2^j x) \in V_{2j}$;
- (4) 逼近性: $\bigcup V_j = L^2(\mathbf{R}), \bigcap V_j = \{0\}$;
- (5) Riesz 基的存在性: 即存在 $A > 0, B < +\infty$, 使得对 $\forall f \in V_0$ 均能唯一地分解

为

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \theta(x-n).$$

其中

$$A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \theta(x-n) \right\|^2 \leq B \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

A, B 与 c_n .

从定义的条件 (1) 单调性可以看出, 闭子空间序列 $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 是一个包含一个的, 条件 (4) 逼近性给出了它们的极限位置:

$$\{0\} \subset \cdots \subset V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \cdots \subset L^2(\mathbf{R}).$$

可以证明, 将 Riesz 基 $\{\phi(x-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$ 正交化, 并通过对尺度函数作伸缩平移来构造每个空间 V_j 的一组正交基.

若将定义 2.6 中的 (5) 改为正交尺度函数, 则此多分辨分析为正交多分辨分析.

正交多分辨分析要求 $V_j \subset V_{j+1}$. 因为 $\phi(x) \in V_0 \subset V_1$, 且 V_1 有标准正交基 $\{\sqrt{2}\phi(2x-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$, 那么必存在唯一序列 $\{h_n\} \in l^2(\mathbf{Z})$ 使得

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \phi(2x-n), \quad (2-19)$$

其中

$$h_n = \langle \phi(x), \sqrt{2}\phi(2x-n) \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \overline{\phi(2x-n)} dx.$$

称 (2-19) 为双尺度方程. 对 (2-19) 两边分别作傅里叶变换, 有

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n e^{-in\omega/2} \hat{\phi}(\omega/2). \quad (2-20)$$

令 $\hat{h}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n e^{-in\omega}$, 那么

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2). \quad (2-21)$$

将 $\hat{\phi}(\omega)$ 表示成 $\hat{h}(\omega)$ 的伸缩乘积, 即对任意 $p > 0$, 有

$$\hat{\phi}(\omega) = \left(\prod_{p=1}^n \frac{\hat{h}(\omega/2^p)}{\sqrt{2}} \right) \hat{\phi}(\omega/2^n).$$

若 $\hat{\phi}(\omega)$ 在 $\omega = 0$ 是连续的, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{\phi}(\omega/2^n) = \hat{\phi}(0)$,

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} \frac{\hat{h}(\omega/2^p)}{\sqrt{2}} \hat{\phi}(0).$$

定理 2.10^[4] 设 $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ 是一个尺度函数, 则对 $\forall \omega \in \mathbf{R}$, h_n 的傅里叶级数满足

$$\hat{h}(0) = \sqrt{2} |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2 \quad (2-22)$$

反之, $\hat{h}(\omega)$ 在 $\omega = 0$ 的某邻域内连续可微, 以 2π 为周期, 满足 (2.22) 且

$$\inf_{\omega \in [-\pi/2, \pi/2]} |\hat{h}(\omega)| > 0,$$

则

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} \frac{\hat{h}(\omega/2^p)}{\sqrt{2}}.$$

为某尺度函数 $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ 的傅里叶变换.

满足 (2-22) 中第二式的离散滤波器叫做共轭镜像滤波器. 其中滤波器系数 h_n 有以下性质^[4]:

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |h_n|^2 = 1, \quad (2-23)$$

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} h_{n-2m} \bar{h}_n = \delta_{m,0}, \quad (2-24)$$

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} h_{2n} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_{2n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (2-25)$$

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} h_n = \sqrt{2}. \quad (2-26)$$

事实上, 根据双尺度方程

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_n \phi(2x - n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_n \phi_{1,n}(x),$$

因此

$$\begin{aligned}\phi(x-m) &= \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_n \phi(2x-2m-n) \\ &= \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_{n-2m} \phi(2x-n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_{n-2m} \phi_{1,n}(x),\end{aligned}$$

则有

$$\delta_{m,0} = \langle \phi(x-m), \phi(x) \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_{n-2m} \bar{h}_n,$$

这样便得到 (2-24) 式. 将 (2-24) 式的 n 取作 0, 便有 (2-23) 式.

2.2.6 小波的分解和重构

设 $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 是由尺度函数 ϕ 生成的多分辨率分析, 双尺度方程为

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_n \phi(2x-n), \quad (2-27)$$

其中 $h_n = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \overline{\phi(2x-n)} dx$.

小波函数为

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} g_k \phi(2x-k), \quad (2-28)$$

其中 $g_k = (-1)^k \bar{h}_{1-k}$.

由于 $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, $V_j \perp W_j$, 那么 $L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} W_j$. $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的标准正交基. 因此对于一个信号 f , 有

$$f_j(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_{j-1,n} \phi_{j-1,n}(x) + \sum_{n \in \mathbf{Z}} d_{j-1,n} \psi_{j-1,n}(x). \quad (2-29)$$

用 $\phi_{j-1,n}$ 和 $\psi_{j-1,n}$ 与上式两端分别作内积, 有

$$c_{j-1,n} = \langle f_j, \phi_{j-1,n} \rangle, \quad (2-30)$$

$$d_{j-1,n} = \langle f_j, \psi_{j-1,n} \rangle. \quad (2-31)$$

$c_{j,n}, d_{j,n}$ 分别为尺度系数和小波系数.

将 (2-27) 式写成一般形式:

$$\phi_{j-1,n}(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_{k-2n} \phi_{j,k}(x). \quad (2-32)$$

将 (2-32) 式代入 (2-30) 式,

$$c_{j-1,n} = \langle f_j, \sum_k h_{k-2n} \phi_{j,k} \rangle = \sum_k \bar{h}_{k-2n} \langle f_j, \phi_{j,k} \rangle.$$

因为 $c_{j,n} = \langle f_j, \phi_{j,n} \rangle$, 所以有

$$c_{j-1,n} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \bar{h}_{k-2n} c_{j,k}. \quad (2-33)$$

同样 (2-31) 式经过一系列变换可以得到

$$d_{j-1,n} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \bar{g}_{k-2n} c_{j,k}. \quad (2-34)$$

(2-33) 式和 (2-34) 式为 Mallat 分解算法.

下面再来看小波的重构.

将双尺度方程一般形式代入 (2-29) 式

$$f_j(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_{j-1,n} \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_{k-2n} \phi_{j,k}(x) + \sum_{n \in \mathbf{Z}} d_{j-1,n} \sum_{k \in \mathbf{Z}} g_{k-2n} \phi_{j,k}(x). \quad (2-35)$$

用 $\phi_{j,k}(x)$ 与 (2-35) 式两端分别作内积, 有

$$c_{j,k} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_{k-2n} c_{j-1,n} + \sum_{n \in \mathbf{Z}} g_{k-2n} d_{j-1,n}. \quad (2-36)$$

(2-36) 式称为 Mallat 合成算法.

2.3 本章小结

这一章简要论述了 Fourier 分析, 小波本质, 小波分析的理论, 连续小波变换, 离散小波变换, 多分辨率分析及小波的分解和重构. 为第四章和第五章的微积分方程小波数值解的应用提供了理论依据.

3 积分方程与微分方程简介

3.1 积分方程

3.1.1 积分方程历史简介

积分方程是线性代数和近代泛函分析的先驱, 是一门古老而又有强大生命力的学科. 早在 1728 年, 拉普拉斯就运用了积分变换

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xy} \phi(y) dy, \quad (3-1)$$

求解线性差分方程和微分方程. 1822 年, 傅里叶在求解热传导问题的过程中发现了两对反演公式.

阿贝尔分别在 1823 年和 1826 年发表了两篇有关积分方程的文章, 考虑了一种推广的所谓等时摆问题, 建立了关于未知数 $s(y)$ 的积分方程

$$t(h) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{s'(y) dy}{\sqrt{h-y}},$$

其中, g 是已知常数, 并求得解为

$$s(y) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \int_0^y \frac{t(\zeta) d\zeta}{\sqrt{y-\zeta}},$$

以及研究了后来以其名命名的阿贝尔方程

$$f(x) = \int_0^x \frac{\phi(y) dy}{(x-y)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

其中, $f(x)$ 是一个连续函数且 $f(\alpha) = 0$.

1826 年, 泊松在研究磁场理论时获得了一类积分方程

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x-s)y(s) ds,$$

直到 1888 年, Du.Bois-Raymond 才首次提出“积分方程”的名称.

更一般的一类积分方程, 即 Fredholm 方程

$$y(x) = f(x) + \int_0^x K(x,s)y(s) ds.$$

是瑞典数学家 Erik.Ivar.Fredholm(1866-1927) 于 1900 年首次研究解决的. Fredholm 方程和 Volterra 方程的主要区别在于积分限. 前者的积分限为常数, 后者的积分上下限为

变数. 事实上, 一般认为 Volterra 和 Fredholm 是积分方程的奠基者, Hilbert, Schmidt 和 Muskhelishvili 等学者对积分方程的理论和应用作出了重要的贡献.

3.1.2 积分方程的分类

定义 3.1^[8] 通常把积分号下含有未知数的方程称为积分方程. 例如

$$a(x)y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)F[y(s)] ds + f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

定义 3.2^[8] 如果自变量的个数多于一个, 则称为多维积分方程. 例如

$$y(x, s) = \int_G K(x, s, \xi, \eta)y(\xi, \eta)d\xi d\eta + f(x, s).$$

一般情况下, 积分方程可以分为线性、非线性, 对于线性积分方程可以进一步分类. 首先按积分限可分为 Fredholm 积分方程和 Volterra 积分方程, 若方程中积分限都是常数, 则称为 Fredholm 积分方程; 若积分中有一个是变量, 则称为 Volterra 积分方程.

其次, 按形式可分为第一类、第二类和第三类积分方程, 若未知函数仅出现在积分号内, 不出现在积分号外, 则称为第一类积分方程.

第一类 Fredholm 积分方程

$$\lambda \int_a^b K(x, s)y(s)ds + f(x) = 0,$$

第一类 Volterra 积分方程

$$\lambda \int_a^x K(x, s)y(s)ds + f(x) = 0.$$

若未知函数既出现在积分号内, 又出现在积分号外, 则称为第二类积分方程.

第二类 Fredholm 积分方程

$$\lambda \int_a^b K(x, s)y(s)ds + f(x) = y(x),$$

第二类 Volterra 积分方程

$$\lambda \int_a^x K(x, s)y(s)ds + f(x) = y(x).$$

若存在函数 $a(x)$, 在区间 $[a, b]$ 上至少有一个零点, 则有第三类积分方程

第三类 Fredholm 积分方程

$$\lambda \int_a^b K(x, s)y(s)ds + f(x) = a(x)y(x),$$

第三类 Volterra 积分方程

$$\lambda \int_a^x K(x, s)y(s)ds + f(x) = a(x)y(x).$$

3.1.3 积分方程常用解法 [8][47][49][50]

一般情况下, 积分方程很难求得其显式解, 只有在某些特殊情况下才能求得其显式解. 因此, 不得不采用各种逼近方法或者近似解法. 下面介绍 4 种积分方程常用的数值解法.

1、有限差分逼近法

考虑第二类线性 Fredholm 积分方程

$$y(x) = \int_a^b K(x, s)y(s)ds + f(x). \quad (3-2)$$

把区间 (a, b) n 等分, 每部分区间长为 $\frac{b-a}{n} = \Delta s = \Delta x$. 设

$$K(a + p\Delta x, a + q\Delta s) = K_{pq}, \quad p, q = 1, 2, \dots, n,$$

$$y(a + p\Delta x) = y_p, \quad p = 1, 2, \dots, n,$$

$$f(a + p\Delta x) = f_p, \quad p = 1, 2, \dots, n.$$

积分方程 (3-2) 中的积分可由代数和 $\sum_{q=1}^n K_{pq}y_q\Delta s$ 代替得到一组线性代数方程

$$y_p = \sum_{q=1}^n K_{pq}y_q\Delta s + f_p, \quad p = 1, 2, \dots, n, \quad (3-3)$$

来近似代替积分方程 (3-2), 其中 $K_{pq}, f_p, \Delta s$ 为已知数, 而 y_q 为未知数. 根据线性代数方程的基础知识可知方程组 (3-3) 的系数行列式

$$K = \begin{vmatrix} 1 - k_{11}\Delta s & -k_{12}\Delta s & \cdots & -k_{1n}\Delta s \\ -k_{21}\Delta s & 1 - k_{22}\Delta s & \cdots & -k_{2n}\Delta s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_{n1}\Delta s & -k_{n2}\Delta s & \cdots & 1 - k_{nn}\Delta s \end{vmatrix}$$

是否等于零直接关系到方程组 (3-3) 的解得存在与否. 相应于关于代数方程组 (3-3) 的定理, 对于积分方程 (3-2) 也有类似的定理, 即 Fredholm 定理.

定理 3.1^[8](Fredholm 选择定理) 第二类 Fredholm 积分方程 (3-2), 要么对于所有的函数 $f(x)$ 都有解且解唯一; 要么相应的齐次方程至少有一个非平凡解, 即至少有一个不恒等于零的解.

定理 3.2^[8] 方程 (3-2) 有唯一解时, 其转置方程

$$y^*(x) = \int_a^b K(s, y)y^*(s)ds + f^*(x),$$

也有唯一解. 相应于 (3-2) 的齐次方程及其转置方程都有有限个互相线性无关的解, 且线性无关的解的个数也相同.

定理 3.3^[8] 当相应 (3-2) 的齐次方程至少有一个非平凡解时, 非齐次方程 (3-2) 有解的充要条件是其齐次转置方程的每一个解都满足可解条件

$$\int_a^b f(x)y^*(x)dx = 0.$$

在实际应用中, Fredholm 选择定理起着特别重要的作用. 对许多实际问题, 往往企图直接证明方程 (3-2) 解的存在唯一性相当困难, 但借组 Fredholm 选择定理, 只需证明其相应的齐次方程或者其转置齐次方程只有平凡解即可.

2、逐次逼近法

逐次逼近法是求解代数方程、超越方程、微分方程的一种基本的数值逼近方法. 同时也是求解积分方程逼近解得有利工具. 对于参数 λ 的绝对值充分小的一致连续核的积分方程, 可以利用展开成参数 λ 的幂级数的方法求得其唯一解.

考虑积分方程

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y(s)ds + f(x). \quad (3-4)$$

取其自由项为零次近似解

$$y_0(x) = f(x),$$

将零次近似解 $y_0(x)$ 代入方程 (3-4) 的右端, 把所得结果作为一次近似解

$$y_1(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y_0(s)ds + f(x),$$

再将该近似解代入方程 (3-4) 的右端, 并把所有结果作为二次近似解

$$y_2(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y_1(s)ds + f(x),$$

依此类推, 若得到 n 次近似解则将其代入 (3-4) 的右边, 取所得结果为 $n+1$ 次近似解

$$y_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y_n(s)ds + f(x). \quad (3-5)$$

于是 (3-5) 式就成为逐次逼近法的递推公式, 若逐次逼近法的这一列近似解 $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$ 一致收敛, 则其极限就是方程 (3-4) 的解, 若极限不存在, 则逐次逼近法便失去了效用, 需要其他方法求解或讨论其解的存在性等.

一般地, 可得 n 次近似解的表达式

$$y_n(x) = f(x) + \sum_{k=1}^n \lambda^k \int_a^b K^{(k)}(x, s) f(s) ds. \quad (3-6)$$

当 $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ 时, 近似解序列 (3-6) 一致收敛, 于是方程 (3-4) 就有形如 (3-6) 的解. 由于逐次逼近法的收敛速度缓慢, 所以其应用范围不够广泛.

3、待定系数法

考虑第二类 Fredholm 积分方程

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds + f(x). \quad (3-7)$$

待定系数法就是将未知函数 $\phi(x)$ 展为下式:

$$y(x) = \sum_{k=1}^n a_k u_k(x). \quad (3-8)$$

其中, $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ 为已知的线性无关函数.

将 (3-8) 式代入 (3-7) 式得

$$\sum_{k=1}^n a_k u_k(x) - \lambda \sum_{k=1}^n a_k \int_a^b K(x, t) u_k(t) dt - f(x) = 0 \quad (3-9)$$

求出系数 a_k 后, 再由 (3-8) 即可求出原方程的解.

下面我们简要介绍两种常用的求系数的方法:

(1) 配置点法

选择 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 使 (3-9) 式左端正好为 0, 即在 $[a, b]$ 上适当选取

$$a \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_j \leq b, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

使

$$\sum_{k=1}^n a_k u_k(x_j) - \lambda \sum_{k=1}^n a_k \int_a^b K(x_j, t) u_k(t) dt - f(x_j) = 0$$

解此方程组可求出 a_k , 同时可以求出近似解 $y(x)$. 这种方法称为配置点法.

(2) 矩量法

设 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ 为 $L^2[a, b]$ 内完备的标准正交函数系. 它们与 $y^{(n)}(x)$ 作内积, 即

$$\langle y^{(n)}(x), u_k(x) \rangle = \lambda \langle \int_a^b K(x, t) y^{(n)}(x) dt, u_k(x) \rangle + \langle f(x), u_k(x) \rangle.$$

然后求解满足条件的方程组以确定 $y^{(n)}(x)$. 这种方法称为矩量法或者 Galerkin 逼近法.

4、数值积分法

数值积分法是用数值积分公式把积分方程中的积分用有限项和式代替, 进而把原问题转化为求解线性代数方程组, 最后求解其近似解, 这样就避免了复杂的积分计算, 减少计算量. 特别是, 当积分方程的核不是由解析式表达给出, 而是由一些离散点给出时, 更能显示该方法的优越性.

将定积分用一个适当的 Riemann 和来近似代替, 通常写为

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=1}^n \omega_j f(\omega_j). \quad (3-10)$$

以第二类 Fredholm 积分方程 (3-7) 为例, 移项, 得

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad (3-11)$$

取数值积分公式 (3-10) 近似代替 (3-11) 中的积分, 得

$$y(x) - \lambda \sum_{j=1}^n \omega_j K(x, x_j) y(x_j) \approx f(x),$$

再令 $x = x_i, i = 1, 2, \dots, n$.

$$y(x_i) - \lambda \sum_{j=1}^n \omega_j K(x_i, x_j) y(x_j) \approx f(x_i),$$

考虑代数方程组

$$\tilde{y}(x_i) - \lambda \sum_{j=1}^n \omega_j K(x_i, x_j) \tilde{y}(x_j) = f(x_i). \quad (3-12)$$

这是由含有 n 个未知数 $\tilde{y}(x_1), \tilde{y}(x_2), \dots, \tilde{y}(x_n)$ 的 n 个代数方程构成的线性代数方程组. 若求得其解为 $\tilde{y}(x_1), \tilde{y}(x_2), \dots, \tilde{y}(x_n)$, 则可作为 $y(x)$ 在结点 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的近似值, 从而可取积分方程 (3-11) 的近似解为

$$\tilde{y}(x) = \lambda \sum_{j=1}^n \omega_j K(x, x_j) \tilde{y}(x_j) + f(x). \quad (3-13)$$

在结点处, $\tilde{y}(x) = y(x)$. 通常情况下, 并非结点取得越多, 误差就越小.

3.2 微分方程

3.2.1 微分方程简介^[38-40]

在物理、力学、热学、电磁学、自动学等领域中, 除了要从代数方程求某一物理量的解外, 更常遇见的, 是要研究某物理量和其它物理量之间的变化关系. 这些变化关系, 在数学上成为函数关系. 例如, 求卫星在发射以后各个时刻 t 的运行速度 $v(t)$, 或求梁的中线各点 x 在静载条件下的挠度 $\omega(x)$, 或求梁的中线各点 x 在动载条件下的挠度 $\omega(x, t)$, 我们称 $v(t)$, $\omega(x)$, $\omega(x, t)$ 为自变量或独立变量 x, t 或 x 和 t 的待定函数或未知函数.

物理学, 力学等领域中的各个定律, 并不一定直接给出这些未知函数或自变量之间的量的规律, 而往往给出这些函数和它们各阶导数或各阶微分对自变量的关系, 这种带有导数的符号或微分符号的未知函数的方程称为微分方程. 例如^[53]

运动方程

$$\frac{ds}{dt} = v(t), \frac{dv}{dt} = a(t).$$

振动方程

$$\frac{d^2s}{dt^2} + a \frac{ds}{dt} + k^2s = f \sin \omega t.$$

梁的挠度方程

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ(x) \frac{d^2\omega}{dx^2} \right) = q(x).$$

拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

热传导方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = a \frac{\partial v}{\partial t}.$$

双调和方程

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

3.2.2 微分方程的分类^[53]

凡微分方程里的待定函数只有一个自变量的函数, 则这些微分方程称为常微分方程, 如运动方程、振动方程等; 凡微分方程里的待定函数是两个或者多于两个独立的自变量的函数, 则这些微分方程称为偏微分方程, 如热传导方程、双调和方程.

微分方程中待定函数的导数的最高阶数, 称为微分方程的阶, 如运动方程是一阶方程, 振动方程是二阶方程, 双调和方程是四阶方程. 在动力学里, 最常见的是二阶方程, 在弹性理论里, 最常见的是四阶方程.

微分方程中待定函数的最高阶导数的次数, 称为微分方程的次数, 如运动方程是一阶一次方程, 振动方程是二阶一次方程, 热传导方程是四阶一次方程.

3.2.3 常微分方程常用解法^[38-40]

常微分方程数值解法主要分为两大类, 初值问题和边值问题的数值方法.

1、一阶常微分方程的初值问题

考虑初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

首先对常微分方程进行离散化, 建立求数值解的递推公式. 递推公式通常有两类, 一类是单步法, 计算 y_{i+1} 时, 只用到 x_{i+1} , x_i 和 y_i , 即前一步的值, 因此有了初值以后就可以逐步往下计算; 另一类是多步法, 计算 y_{i+1} 时, 除了用到 x_{i+1} , x_i , y_i 以外, 还要用到 x_{i-p} , y_{i-p} ($p = 1, 2, \dots, k$), 即前面 k 步的值. 它们都是基于把一个连续的定解问题离散化为一个差分方程来求解, 是一种步进式的方法.

单步法的主要解法有 (h 为步长):

(1) 梯形法

采用梯形方法代替原来的矩形方法, 其计算公式为

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

由于数值积分的梯形公式比矩形公式的精度高, 因此梯形法是一个比欧拉方法精度高的数值方法.

(2) 欧拉 (Euler) 法

该方法是求解常微分方程初值问题的最简单的数值方法, 其计算公式为

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

由于数值积分的矩形公式精度很低, 所以欧拉方法的效果不好.

(3) 龙格 - 库塔 (Runge-kutta) 法

该方法用函数 $f(x, y)$ 在若干点上的函数值的线性组合来构造近似公式, 构造时要求近似公式在 (x_i, y_i) 处的泰勒展开式与解 $y(x)$ 在 x_i 处的泰勒展开式的前几项重合, 从而使近似公式达到所需要的阶数, 既避免求偏导, 又提高了计算方法精度的阶数. 其计算公式为

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \\ k_1 = f(x_i, y_i), \\ k_2 = f(x_{i+1}, y_i + hk_1). \end{cases}$$

龙格 - 库塔方法的推导基于泰勒展开式, 因而它要求所求的解具有较好的光滑性.

多步法的主要解法有亚当姆斯法, 该方法在每一步都需要先预报几个点上的斜率值, 计算量比较大. 以二阶亚当姆斯法为例, 其计算公式为

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3y'_i - y'_{i-1}).$$

在初值问题的数值解法中, 除了上述一些方法外, 还有一些行之有效的方法. 比如, 外推法, 该方法通过不同步长的数值解进行适当线性组合, 有效地提高精度阶的方法; 混合法, 它是一种利用非整数步点值 $u_{n+\tau}$, $f_{n+\tau}$ (τ 为非整数), 既可使方法满足根本条件, 又可达到较高精度阶的方法.

2、常微分方程的边值问题

求解常微分方程边值问题的数值解法有 2 种方法.

(1) 差分法

该方法将区间 $[a, b]$ 作剖分 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k+1} < x_k = b$ 把微分方程差分离散化, 加上边值条件一并构成一代数方程组, 解此代数方程组即可得到边值问题的数值解.

(2) 打靶法

该方法适当选择和调整初值条件, 求解一系列初值问题, 使之逼近给定的边界条件. 如果将描述的曲线视作弹道, 那么求解过程即不断调整试射条件使之达到预定的靶子, 故称之为打靶法或试射法.

3.3 小波数值解应用于微积分方程的研究进展

小波是一种满足特定性质的函数, 其伸缩和平移可以生成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一组基. 由于多分辨分析使小波比较传统的 Fourier 分析具有更为细致的时频分析能力, 目前在数值

计算中 (积分方程、微分方程、高维微 - 积方程) 得到了广泛的应用.

在数学领域, 小波分析是数值分析强有力的工具, 它能简捷、有效地求解微分方程、积分方程以及最优控制等问题, 求解微 (积) 分方程的实质就是将方程由原来的坐标系转化到小波系数下求解, 充分利用方程在小波系下的稀疏特性来简化计算, 提高算法实现效率.

许多科学和工程问题的数学模型都能变换为求解相应的微 (积) 分方程, 而在微 (积) 分方程求解中只有少数方程能够给出精确解, 所以积分方程的数值解法是现阶段研究的主要方向之一, 在这方面许多学者作了大量的研究: U.Lepik, E.Tamme 主要研究线性积分方程^{[14][18]}、第二类 Fredholm 非线性积分方程^[15]、微积分方程^[19]、非线性微积分方程^[16]和微分方程^[21]的 Haar 小波数值方法, 并由均匀 Haar 小波推广至非均匀 Haar 小波^[17]. C.H.Hsiao, C.F.Chen, W.J.Wang 主要研究小波应用非线性时间延迟系统^[23]、求解变分问题^[25]和小波应用于集总分布参数系统^[26]等. J.S.Gu, W.S.Jiang 主要研究了 Haar 函数向量并建立了 Haar 小波积分算子矩阵^[28]. K.Maleknejad, T.Lotfi 主要应用 B 样条小波和香农小波的 Galerkin 方法求解线性积分方程^[29]. K.Maleknejad, D.Rahbar 主要应用 B 样条小波函数求解第二类 Fredholm 积分方程^[30]. K.Maleknejad, F.M-irzaee 主要应用有理 Haar 小波求解线性积分方程^[31]. M.Razzaghi, S.Yousefi 主要应用 Legendre 小波方法求解非线性 Volterra-Fredholm 积分方程^[32]. G.Hariharan, K.Kannan, K.R.Sharma 主要应用 Haar 小波方法求解 Fisher 方程^[33]. C.Cattani 主要研究了 Shannon 小波的理论^[50], 提出了 Shannon 小波系数^[49]的求解方法, 并求解微积分方程^[48]. N.M.Bujurke, S.C.Shiralashetti, C.S.Salimath 主要应用单项 Haar 小波级数方法求解非线性振子方程^[51]. K.Maleknejad, M.Yousefi, K.Nouri 主要研究了 Daubechies 小波积分的计算方法^[52].

3.4 本章小结

这一章介绍了积分方程和微分方程的历史、分类、常用的数值算法以及近年来小波数值解在微积分方程中的应用.

4. Haar小波方法

这一章我们以 Haar 小波为例介绍线性与非线性两类积分方程的小波数值解法.

4.1 Haar 小波的定义及其相关的性质

4.1.1 Haar尺度函数

Haar 小波族 $h_n(x)$ 是由在特定区间的值 ± 1 , 在别处值为 0 的一组方形波组成, 第一条曲线记为 $h_0(x)$, 第二条曲线 $h_1(x)$, 其余的小波函数是由 $h_1(x)$ 伸缩平移得到.

定义 4.1^[16] Haar 尺度函数定义为:

$$h_0(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{others.} \end{cases} \quad (4-1)$$

由于 $h_0(x)$ 只在区间 $[0, 1]$ 上为 1, 在 $[0, 1]$ 外恒为零, 我们称 $h_0(x)$ 的支集为 $[0, 1]$.

首先考虑函数 $h_0(x - k)$, k 为任意整数, 即 $k \in \mathbf{Z}$. 可以看出 $h_0(x - k)$ 的支集为 $[k, k + 1]$, 即 $h_0(x - k)$ 在 $[k, k + 1]$ 外恒为零, 并且 $h_0(x - k)$ 的图形是 $h_0(x)$ 的图形向右 ($k > 0$) 或者向左 ($k < 0$) 移动 $|k|$ 个单位. 令 l^2 是由所有满足条件 $\sum_{k \in \mathbf{Z}} |c_k|^2 < +\infty$ 的数列 $\{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 组成的空间, 且 V_0 是如下所有函数组成的空间:

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k h_0(x - k). \quad (4-2)$$

其中 $\{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}} \in l^2$. 在应用中, 我们只要求 k 属于某个有限整数集, 即 (4-2) 式只有有限项求和. 由于 $h_0(x - k)$ 只在 $x = k$ 和 $x = k + 1$ 不连续, 所有 V_0 中的函数是分段常函数, 其不连续点只能是某些整数点. 又由于 $h_0(x - k)$ 的支集为 $[k, k + 1]$, 并且 (4-2) 式中只有有限项求和, 所以 V_0 中的任意函数在某个有限区间外恒为零, 这样的函数称为具有紧支集的 (即函数值不恒为零的定义域区间是有限的).

定理 4.1^[2] (1) $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j$; (2) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j} x) \in V_0$.

定理 4.2^[2] 函数集 $\{2^{j/2} h_0(2^j x - k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 是 V_j 的标准正交基.

4.1.2 Haar小波函数

前面讨论了由 Haar 尺度函数 $h_0(x)$ 所生成的一组嵌套空间 $V_j \in V_{j+1}, j \in \mathbf{Z}, j$ 越大, 空间 V_j 就越精细, 包含的信息就越多. 空间的精细程度可由分辨率来描述.

定义 4.2^[14] Haar 小波函数 (母小波函数) 定义为:

$$h_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq x < 1, \\ 0, & \text{others.} \end{cases} \quad (4-3)$$

$h_1(x)$ 的伸缩和平移生成的 Haar 小波函数族:

$$h_n(x) = h_1(2^j x - k), n = 2^j + k, \quad j \geq 0, 0 \leq k \leq 2^j. \quad (4-4)$$

前八个 Haar 小波函数如图 4.1 所示:

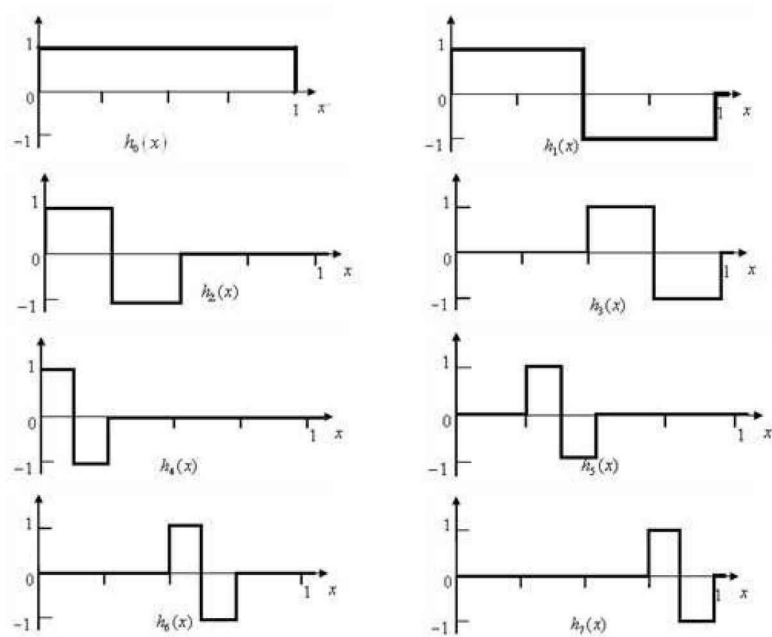


图 4.1 前八个 Haar 小波函数 $h_n(x)$ ($n=0, 1, 2, \dots, 7$).

4.2 积分方程的 Haar 小波数值解法

4.2.1 函数逼近^[17]

任何函数 $u(x) \in L^2[0, 1]$ 可用 Haar 小波级数展开, 即

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n h_n(x), \quad (4-5)$$

其中 Haar 系数可以通过下式计算得到:

$$c_n = 2^j \int_0^1 u(x) h_n(x) dx, \quad (4-6)$$

当 $n = 0$, 有 $c_0 = \int_0^1 u(x)dx$, 使用正交关系得

$$\int_0^1 h_n(x)h_l(x)dx = 2^{-j}\delta_{n,l} = \begin{cases} 2^{-j}, & n = l, \\ 0, & n \neq l. \end{cases} \quad (4-7)$$

通常, 级数展开式 (4-5) 有无穷多项, 但如果 $u(x)$ 是阶梯函数或可用阶梯函数逼近, 则 (4-5) 式被截断为有限项, $u(x)$ 可取前面 m 项, 得

$$u(x) \approx \sum_{n=0}^{m-1} c_n h_n(x) = \mathbf{C}_m^T \mathbf{h}_m(x), \quad (4-8)$$

其中系数向量 $\mathbf{C}_m^T$ 和 Haar 函数向量 $\mathbf{h}_m(x)$ 被定义如下:

$$\mathbf{C}_m^T = [c_0, c_1, \dots, c_m], \quad (4-9)$$

$$\mathbf{h}_m(x) = [h_0(x), h_1(x), \dots, h_{m-1}(x)]^T. \quad (4-10)$$

这里 $m = 2^j$, 符号 T 代表矩阵转置.

一般在求解积分方程时, 常常会遇到对核的处理问题. 下面给出对核的逼近, 设核函数 $K(x, t)$ 为包含 2 个独立变量的函数, 其中 $x \in [0, 1)$, $t \in [0, 1)$, 它可以用 Haar 小波函数展开为:

$$K(x, t) \approx \sum_u^{m-1} \sum_v^{m-1} K_{uv} h_u(x) h_v(t), \quad (4-11)$$

其中 $u = 0, 1, 2, \dots, m-1$, $v = 0, 1, 2, \dots, m-1$, $m = 2^{\alpha+1}$, $\alpha = 0, 1, \dots$, K_{uv} 可通过下式得到, 即

$$K_{uv} = 2^{i+n} \int_0^1 \int_0^1 K(x, t) h_u(x) h_v(t) dx dt, \quad (4-12)$$

其中 $i, n = 0, 1, 2, \dots, \alpha$.

将 (4.12) 式代入 (4.11) 式, 得

$$K(x, t) = \mathbf{h}_m^T(x) K \mathbf{h}_m(t), \quad (4-13)$$

其中 $K = (K_{uv})_{m \times m}^T$.

4.2.2 Haar小波的积分算子矩阵^[18]

这一节, 我们给出 Haar 小波的积分算子矩阵. 在 (4-10) 式中, 选择配置点 $x = \frac{n}{8}$, $n = 1, 3, 5, 7$, 则

$$\mathbf{h}_4(1/8) = [1, 1, 1, 0]^T, \mathbf{h}_4(3/8) = [1, 1, -1, 0]^T,$$

$$\mathbf{h}_4(5/8) = [1, -1, 0, 1]^T, \mathbf{h}_4(7/8) = [1, -1, 0, -1]^T.$$

上面 4 个式子可以组合成矩阵的形式, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_4 &= [\mathbf{h}_4(1/8), \mathbf{h}_4(3/8), \mathbf{h}_4(5/8), \mathbf{h}_4(7/8)] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

我们定义 m 阶 Haar 方阵如下:

$$\mathbf{H}_m = [\mathbf{h}_m(1/2m), \mathbf{h}_m(3/2m), \dots, \mathbf{h}_m((2m-1)/2m)], \quad (4-14)$$

其中 $\mathbf{H}_1 = [1]$, $\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

对 $\mathbf{h}_m(x)$ 积分可得

$$\int_0^x \mathbf{h}_m(x) dx = \mathbf{P}_m \mathbf{h}_m(x), x \in [0, 1], \quad (4-15)$$

在这里 $\mathbf{P}_m$ 为 $m \times m$ 阶积分算子矩阵并且有

$$\mathbf{P}_m = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2m\mathbf{P}_{m/2} & -\mathbf{H}_{m/2} \\ \mathbf{H}_{m/2}^{-1} & \mathbf{O}_{m/2} \end{bmatrix}. \quad (4-16)$$

其中 $\mathbf{P}_1 = [\frac{1}{2}]$.

4.2.3 线性与非线性积分方程的Haar小波方法^[18]

首先给出线性积分方程的两种形式:

(1) 线性 Fredholm 积分方程:

$$u(x) - \int_{\alpha}^{\beta} K(x, t, u(t)) dt = f(x), \quad x, t \in [\alpha, \beta], \quad (4-17)$$

(2) 线性 Volterra 积分方程:

$$u(x) - \int_{\alpha}^x K(x, t, u(t)) dt = f(x), \quad x, t \in [\alpha, \beta]. \quad (4-18)$$

线性 Fredholm 方程与线性 Volterra 方程的主要区别在于积分限, 前者的积分限为常数, 后者的积分上(下)限为变数.

其次, 我们令线性 Fredholm 积分方程形式如下:

$$u^*(x^*) - \int_{\alpha}^{\beta} K^*(x^*, t^*, u^*(t^*)) dt^* = f^*(x^*), \quad x^* \in [\alpha, \beta], \quad (4-19)$$

其中核函数 K^* , 函数 f^* 为已知函数, 因为 Haar 小波函数的定义在 $[0, 1]$ 上, 故对 x^*, t^* , 做如下变换:

$$t^* = (\beta - \alpha)t + \alpha, x^* = (\beta - \alpha)x + \alpha. \quad (4-20)$$

将 (4-20) 式代入到 (4-19) 式中, 整理得:

$$u(x) - \int_0^1 K(x, t)u(t)dt = f(x), \quad x \in [0, 1], \quad (4-21)$$

其中 $u(t) = u^*(t^*), u(x) = u^*(x^*), f(x) = f^*(x^*), K(x, t) = (\beta - \alpha)K^*(x^*, t^*)$.

由已知 (4-8) 式我们令

$$u(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x), \quad (4-22)$$

将 (4-22) 式代入 (4-21) 式, 得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) - \int_0^1 K(x, t) \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(t) dt &= f(x), \\ \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) - \sum_{i=1}^{2M} a_i \int_0^1 K(x, t) h_i(t) dt &= f(x), \\ \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) - \sum_{i=1}^{2M} a_i G_i(x) &= f(x). \end{aligned} \quad (4-23)$$

其中 $G_i(x) = \int_0^1 K(x, t) h_i(t) dt$.

接下来, 我们给出求解小波系数 a_i 的两种方法^[18]:

(1) 配置法

将 $x \in [0, 1]$ 分成 $2M$ 个部分 $\Delta x = \frac{1}{2M}, \tau_1 = (l-1)\Delta x, l = 1, 2, \dots, 2M$. 取配置点 $x_l = (l-0.5)\Delta x, l = 1, 2, \dots, 2M$ 并代入 (4-23) 式, 得

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i [h_i(x_l) - G_i(x_l)] = f(x_l), l = 1, 2, \dots, 2M. \quad (4-24)$$

由于 (4-24) 式是以 a_i 为未知数的线性代数方程组, 将 (4-24) 式简写成矩阵形式, 得

$$a(\mathbf{H}_{il} - \mathbf{G}_{il}) = \mathbf{F} \quad (4-25)$$

其中 $\mathbf{G}_{il} = G_i(x_l), \mathbf{F} = f(x_l)$.

(2) Galerkin 法

Galerkin 法亦称为矩量法, 是待定系数逼近法的一种.

对 (4-23) 式等式两边对小波函数 $h_l(x)$ 求内积, 得

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) h_l(x) dx - \int_0^1 \sum_{i=1}^{2M} a_i G_i(x) h_l(x) dx = \int_0^1 f(x) h_l(x) dx, \quad (4-26)$$

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i \int_0^1 h_i(x) h_l(x) dx - \sum_{i=1}^{2M} a_i \int_0^1 G_i(x) h_l(x) dx = \int_0^1 f(x) h_l(x) dx. \quad (4-27)$$

在 (4-27) 式中, $\sum_{i=1}^{2M} a_i \int_0^1 h_i(x) h_l(x) dx$ 展开式如下所示

$$\begin{aligned} \sum_{i,l=1}^{2M} a_i \int_0^1 h_i(x) h_l(x) dx &= a_1 \int_0^1 h_1(x) h_l(x) dx + a_2 \int_0^1 h_2(x) h_l(x) dx + \cdots + \\ &a_l \int_0^1 h_l(x) h_l(x) dx + \cdots + a_{2M} \int_0^1 h_{2M}(x) h_l(x) dx. \end{aligned} \quad (4-28)$$

由 (4-7) 式知, (4-28) 式化简如下:

$$\sum_{i,l=1}^{2M} a_i \int_0^1 h_i(x) h_l(x) dx = a_l \int_0^1 h_l(x) h_l(x) dx = a_l 2^{-j} = \frac{a_l}{m}. \quad (4-29)$$

上式代入 (4-27) 式, 得

$$\frac{a_l}{m} - \sum_{i=1}^{2M} a_i \Gamma_{il} = \int_0^1 f(x) h_l(x) dx. \quad (4-30)$$

其中 $\Gamma_{il} = \int_0^1 G_i(x) h_l(x) dx, l = m + k + 1, m = 2^j, j = 0, 1, 2, \dots, J, k = 0, 1, 2, \dots, m - 1$.

对于线性 Fredholm 积分方程, 把 (4-22) 式代入 (4-18) 式将积分方程转化成代数方程组来求解系数 a_i .

对于非线性 Fredholm 积分方程, 把 (4-22) 式代入 (4-18) 式. 取配置点 $x_l = (l - 0.5)\Delta x$,

$$u(x_l) = \int_0^1 K(x_l, t, u(t)) dt + f(x_l), \quad l = 1, 2, \dots, 2M.$$

把 (4-22) 式代入上式, 得到一个代数方程组, 可求解系数 a_i . 由于这个代数系统是非线性的, 下面叙述文献 [15] 的方法.

假设 (4-18) 式对某个 $J - 1$ 已经求解, $u(t)$ 和 a_i 的新值估计如下

$$\hat{u}^{(v)}(t) = \sum_{i=1}^{2M} \hat{a}_i^{(v)} h_i(t), \quad (4-31)$$

其中

$$\hat{a}_i^{(v)} = \begin{cases} a_i^{(v-1)}, i = 1, 2, \dots, M, \\ 0, i = M + 1, \dots, 2M. \end{cases} \quad (4-32)$$

在 (4-32) 式中当 $i = M + 1, \dots, 2M$. 系数 a_i 小到接近于 0. 根据牛顿迭代法, 得

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{2M} [h_p(x_l) - \int_0^1 K_u(x_l, t, \hat{u}^{(v)}(t)) h_p(t) dt] \Delta a_p \\ & = -\hat{u}^{(v)}(x_l) + \int_0^1 K_u(x_l, t, \hat{u}^{(v)}(t)) dt + f(x_l), \quad l = 1, 2, \dots, 2M, \end{aligned} \quad (4-33)$$

其中 $K_u = \partial K / \partial u$, $x_l = (l - 0.5)\Delta x$.

求解 (4-33) 式可以得

$$a_p^{(v)} = \hat{a}_p^{(v)} + \Delta a_p^{(v)}, u^{(v)}(t) = \sum_{p=1}^{2M} a_p^{(v)} h_p(t). \quad (4-34)$$

将 (4-33) 式写成矩阵的形式, 设

$$\varphi(l) = \int_0^1 K(x_l, t, \hat{u}^{(v)}(t)) dt, \quad (4-35)$$

$$\chi(p, l) = \int_0^1 K_u(x_l, t, \hat{u}^{(v)}(t)) h_p(t) dt. \quad (4-36)$$

令

$$\mathbf{S} = \mathbf{H} - \chi, \mathbf{F} = -u^{(v)} + \varphi + f, \quad (4-37)$$

(4-33) 式化简成代数方程组, 得

$$\Delta a^{(v)} \mathbf{S} = \mathbf{F}. \quad (4-38)$$

从而 $a^{(v)}$ 的解为 $\Delta a^{(v)} = \mathbf{F} \mathbf{S}^{-1}$.

下面估计积分 (4-35) 式

$$\varphi(l) = \sum_{s=1}^{2M} \int_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} K(x_l, t, \hat{u}^{(v)}(t)) dt. \quad (4-39)$$

这里 $\tau_l = (l - 1)\Delta t$, $\Delta t = \frac{1}{2M}$, $l = 1, 2, \dots, 2M$.

设

$$G(x_l, t, u(t)) = \int K(x_l, t, u(t)) dt + \text{const.}$$

方程 (4-39) 式能写成

$$\varphi(l) = \sum_{s=1}^{2M} [G(x_l, \tau_{s+1}, \hat{u}^{(v)}(ts)) - G(x_l, \tau_s, \hat{u}^{(v)}(ts))]. \quad (4-40)$$

积分 (4-36) 式用同样的方式估计. 设

$$G_u(x_l, t, u(t_s)) = \int K_u(x_l, t, u(t_s)) dt + \text{const},$$

则

$$\chi(p, l) = \sum_{s=1}^{2M} [G_u(x_l, \tau_{s+1}, \hat{u}^{(v)}(t_s)) - G_u(x_l, \tau_s, \hat{u}^{(v)}(t_s))] h_p(t_s).$$

通常从一个配置点出发,

$$a_1^{(0)} = \int_0^1 K(0.5, t, a_1^{(0)}) dt + f(0.5),$$

下一步估计 $\hat{a}_1^{(1)} = a_1^{(0)}$, $\hat{a}_2^{(1)} = 0$ 和

$$\hat{u}^{(1)}(t) = \hat{a}_1^{(1)} h_1(t) + \hat{a}_2^{(1)} h_2(t) = \hat{a}_1^{(1)}.$$

这些估计通过解 (4-33) 式进行修正 ($m=1$).

4.3 算例实验

例 1 考虑第二类 Fredholm 线性积分方程:

$$u(x) + \int_0^1 x e^t u(t) dt = e^{-x}, \quad (4-41)$$

其精确解为 $u(x) = e^{-x} - \frac{x}{2}$.

将 (4-22) 式代入 (4-41) 式, 得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) + \int_0^1 x e^t \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(t) dt &= e^{-x}, \\ \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) + \sum_{i=1}^{2M} a_i \int_0^1 x e^t h_i(t) dt &= e^{-x}. \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) + \sum_{i=1}^{2M} a_i G_i(x) = e^{-x}, \quad (4-42)$$

其中 $G_i(x) = \int_0^1 x e^t h_i(t) dt$, 取离散点 $x \rightarrow x_l = \frac{l-0.5}{2M} (l = 0, 1, 2, \dots, 2M)$, 并代入 (4-42) 式

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i (h_i(x_l) + G_i(x_l)) = e^{-x_l}, \quad (4-43)$$

得离散方程

$$\mathbf{H}_{il} + \mathbf{G}_{il} = \mathbf{F}_l.$$

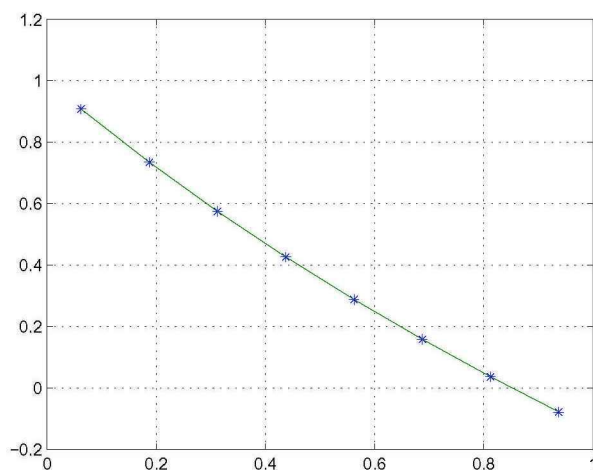


图 4.2 数值解与精确解比较 ($j = 2$).

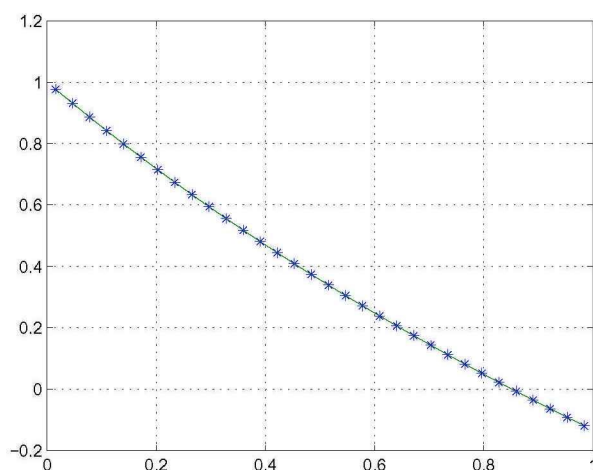


图 4.3 数值解与精确解比较 ($j = 4$).

例 2 考虑非线性 Fredholm 积分方程

$$u(x) - \int_0^1 (2xs)e^{-u(s)^2} ds = x/e, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4-44)$$

其精确解为 $u(x) = x$.

原方程变为

$$u(x) = 2x \int_0^1 te^{-u(t)^2} ds + x/e, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$G(x_l, t, u(t_s)) = xt^2 e^{-u(t_s)^2} + \text{const},$$

$$G_u(x_l, t, u(t_s)) = -2x_l t^2 e^{-u(t_s)^2} u(t_s) + \text{const}.$$

根据 (4-40) 式, 有

$$\varphi(l) = x_l \sum_{s=0}^{2M} (\tau_{s+1}^2 - \tau_s^2) e^{-\hat{u}^{(v)}(t_s)^2},$$

$$\varphi(l) = x_l \sum_{s=0}^{2M} \frac{\tau_{s+1} + \tau_s}{2} (\tau_{s+1} - \tau_s) e^{-\hat{u}^{(v)}(t_s)^2}.$$

因为 $t_s = \frac{\tau_{s+1} + \tau_s}{2}$ 和 $\Delta t = \tau_{s+1} - \tau_s$, 因此

$$\varphi(l) = x_l \Delta t \sum_{s=0}^{2M} t_s e^{-\hat{u}^{(v)}(t_s)^2}.$$

同理可得

$$\chi(p, l) = -2x_l \Delta t \sum_{s=0}^{2M} t_s e^{-\hat{u}^{(v)}(t_s)^2} u(t_s) h_p(t_s).$$

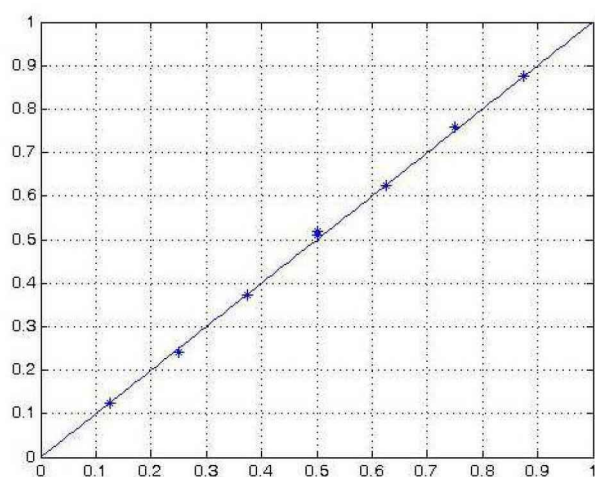


图 4.4 数值解与精确解比较.

4.4 本章小结

这一章论述了 Haar 小波族、Haar 小波变换的相关性质及 Haar 积分算子矩阵, 介绍了第二类 Fredholm 积分方程的 Haar 小波数值算法, 并给出两个测试算例, 算例数值结果与精确解进行了比对, 表明 Haar 小波数值解法的高精度.

5. Shannon小波方法

这一章, 我们以 Shannon 小波为例介绍常微分方程的 Shannon 小波数值解. Shannon 小波具有解析表达式, 应用方便, 缺点是没有紧支集. 近年来, 许多学者特别是意大利学者 C.Cattani^[48-50] 对 Shannon 小波的构造及其应用作了深入的研究.

在这一节, 傅里叶变换及其逆变换分别定义为

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx, \quad f(x) \in L^2(\mathbf{R}),$$

$$f(x) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega.$$

内积与巴塞弗等式分别为

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)} dx,$$

$$\langle f, g \rangle = 2\pi \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)} d\omega.$$

5.1 Shannon 尺度函数与 Shannon 小波函数

Shannon 尺度函数是构造 Shannon 小波的出发点. Shannon 小波与调和波的小波实部一致.

设尺度函数 (或称 sinc 函数) 定义为

$$\phi(x) = \sin cx = \frac{\sin \pi x}{\pi x}, \quad (5-1)$$

其伸缩平移后得到一族函数

$$\phi_k^n(x) = 2^{n/2} \phi(2^n x - k) = 2^{n/2} \frac{\sin \pi(2^n x - k)}{\pi(2^n x - k)}. \quad (5-2)$$

(5-1) 式的傅里叶变换为

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \chi(\omega + 3\pi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \leq \omega \leq \pi, \\ 0, & \text{others.} \end{cases}$$

其中

$$\chi(\omega) = \begin{cases} 1, & 2\pi \leq \omega \leq 4\pi, \\ 0, & \text{others.} \end{cases}$$

类似地可得 $\phi_k^n(x)$ 的傅里叶变换

$$\hat{\phi}_k^n(x) = \frac{2^{-n/2}}{2\pi} e^{-i\omega(k+1/2)/2^n} \chi\left(\frac{\omega}{2^n} + 3\pi\right).$$

Shannon 小波定义为

$$\psi(x) = \frac{\sin \pi(x - \frac{1}{2}) - \sin 2\pi(x - \frac{1}{2})}{\pi(x - \frac{1}{2})},$$

其伸缩平移构成一族函数

$$\psi_k^n(x) = 2^{n/2} \frac{\sin \pi(2^n x - k - \frac{1}{2}) - \sin 2\pi(2^n x - k - \frac{1}{2})}{\pi(2^n x - k - \frac{1}{2})}.$$

$\psi_k^n(x)$ 的傅里叶变换为

$$\hat{\psi}_k^n(x) = \frac{2^{-n/2}}{2\pi} e^{-i\omega(k+1/2)/2^n} [\chi(\frac{\omega}{2^{n-1}}) + \chi(\frac{-\omega}{2^{n-1}})].$$

Shannon 尺度函数 $\phi(x)$ 与 Shannon 小波函数 $\psi(x)$ 的图形见图 5.1.

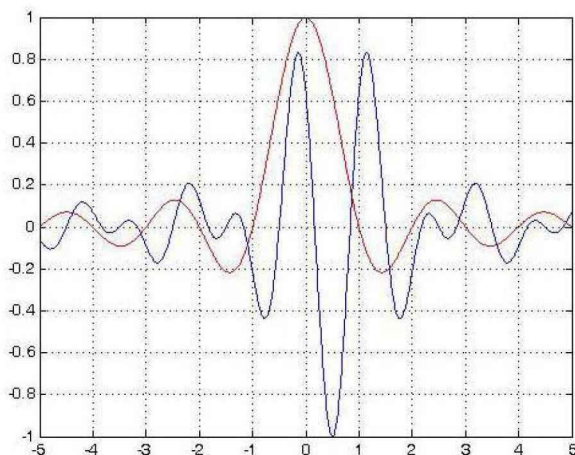


图 5.1 Shannon 尺度函数 $\phi(x)$ 与 Shannon 小波函数 $\psi(x)$

对于 $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$, 有如下的展开式

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \phi_k^0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k^n \psi_k^n(x). \quad (5-3)$$

其中

$$\alpha_k = \langle f, \phi_k^0(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \phi_k^0(x) dx,$$

$$\beta_k^n = \langle f, \psi_k^n(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi_k^n(x) dx.$$

特别地, 当 $\text{supp } \hat{f} \subset [-2^N \pi, 2^N \pi]$ 时, 有

$$f(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \alpha_h \phi_h^0(x) + \sum_{n=0}^N \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k^n \psi_k^n(x).$$

这里 $\phi_h^0(x) = \phi(x-h)$. Shannon 小波逼近函数 $f(x) = e^{-|x|}$ 的逼近图 ($n=0, m=4$)

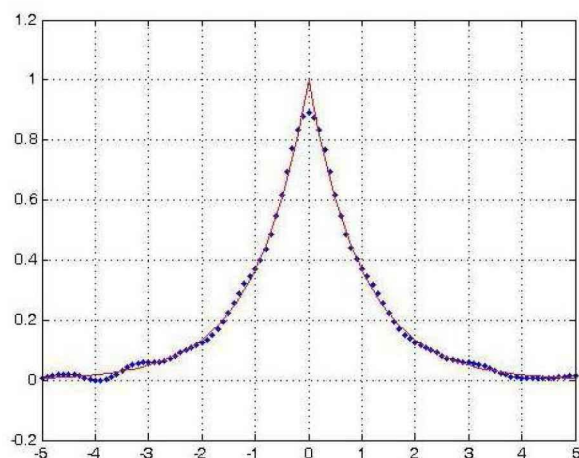


图 5.2 Shannon 小波逼近函数 $f(x) = e^{-|x|}$

定理 5.1^[49] Shannon 小波是标准正交函数族, 即

$$\langle \psi_k^n(x), \psi_h^m(x) \rangle = \delta_{m,n} \delta_{h,k}.$$

定理 5.2^[49] Shannon 尺度函数 $\{\phi_k^0\}$ 关于平移参数 k 是标准正交的, 即

$$\langle \phi_k^0(x), \phi_h^0(x) \rangle = \delta_{k,h}.$$

定理 5.3^[49] Shannon 尺度函数 $\{\phi_k^0\}$ 与 Shannon 小波函数 $\{\psi_h^m\}$ 是正交的, 即

$$\langle \phi_k^0(x), \phi_h^m(x) \rangle = 0, \quad m \geq 0$$

5.2 Shannon 尺度函数与 Shannon 小波函数的相关系数

设 $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ 且 $f(x) \in C^p$, 由 (5-3) 式, 有

$$\frac{d^l}{dx^l} f(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \alpha_h \frac{d^l}{dx^l} \phi_h^0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k^n \frac{d^l}{dx^l} \psi_k^n(x), \quad (5-4)$$

因此, 只要知道了 $\frac{d^l}{dx^l} \phi_h^0(x)$ 和 $\frac{d^l}{dx^l} \psi_k^n(x)$ 的表达式, 就可以获得 $f(x)$ 的 l 阶导数表达式.

设

$$\frac{d^l}{dx^l} \phi_h^0(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{hk}^{(l)n} \phi_k^0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda_{hk}^{(l)} \psi_k^n(x),$$

$$\frac{d^l}{dx^l} \psi_h^m(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Gamma_{hk}^{(l)m} \phi_k^0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{hk}^{(l)mn} \psi_k^n(x).$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda_{hk}^{(l)} &= \left\langle \frac{d^l}{dx^l} \phi_h^0(x), \phi_k^0(x) \right\rangle \Lambda_{hk}^{(l)n} = \left\langle \frac{d^l}{dx^l} \phi_h^0(x), \psi_k^n(x) \right\rangle, \\ \Gamma_{hk}^{(l)m} &= \left\langle \frac{d^l}{dx^l} \psi_h^0(x), \phi_k^0(x) \right\rangle \gamma_{hk}^{(l)mn} = \left\langle \frac{d^l}{dx^l} \psi_h^n(x), \psi_k^m(x) \right\rangle. \end{aligned}$$

定理 5.4^[49] Shannon 尺度函数 $\phi_k^0(x)$ 的相关系数为

$$\lambda_{hk}^{(l)} = \begin{cases} (-1)^{k-h} \frac{i^l}{2\pi} \sum_{s=1}^l \frac{l! \pi^s}{s! [i(k-h)]^{l-s+1}} [(-1)^s - 1], & k \neq h, \\ \frac{i^l \pi^{l+1}}{2\pi(l+1)} [1 + (-1)^l], & k = h. \end{cases}$$

定理 5.5^[49] Shannon 小波函数 $\psi_k^n(x)$ 的相关系数为

$$\gamma_{kh}^{(l)nm} = \begin{cases} i^l \frac{\pi^l 2^{nl-1}}{l+1} (2^{l+1} - 1) (1 + (-1)^l), & h = k, n = m, \\ \mu(h-k) \sum_{s=1}^{l+1} (-1)^{[1+\mu(h-k)](2l-s+1)/2} \frac{l! i^{l-s} \pi^{l-s}}{(l-s+1)! |h-k|^s} (-1)^{-s-2(h+k)} 2^{nl-s-1} \\ \cdot \{ 2^{l+1} [(-1)^{4h+s} + (-1)^{4k+l}] - 2^s [(-1)^{3k+h+l} + (-1)^{3h+k+s}] \}, & h \neq k, n = m \end{cases}$$

$$\text{这里 } \mu(m) = \begin{cases} 1, & m > 0, \\ -1, & m < 0, \\ 0, & m = 0. \end{cases}$$

定理 5.6^[49] 相关系数 $\gamma_{kh}^{(l)nm}$ 可以递推求出, 即

$$\gamma_{kh}^{(l)nm} = 2^{l(n-1)} \gamma_{kh}^{(l)11}.$$

而且

$$\gamma_{kh}^{(2l+1)nn} = -\gamma_{hk}^{(2l+1)nn}, \gamma_{kh}^{(2l)nn} = \gamma_{hk}^{(2l)nn}.$$

定理 5.7^[49] Shannon 小波的混合相关系数为 0. 即 $\Lambda_{kh}^{(l)n} = 0, \Gamma_{hk}^{(l)n} = 0$.

由定理 (5.7) 可得

$$\begin{aligned} \frac{d^l}{dx^l} \phi_h^0(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{hk}^{(l)} \phi_k^0(x), \\ \frac{d^l}{dx^l} \psi_h^m(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{hk}^{(l)mn} \psi_k^n(x). \end{aligned}$$

由定理 (5.5) 可计算 $\gamma_{hk}^{(2)nn} (n = 1, 2, 3, 4)$ 的值见下表.

表 5.1 当 $n = 1$ 时的 $\gamma_{hk}^{(2)11}$

$\gamma_{hk}^{(2)11}$	$h = -2$	$h = -1$	$h = 0$	$h = 1$	$h = 2$
k=-2	-23.0291	-6.0000	-0.5000	-0.6667	-0.1250
k=-1	-6.0000	-23.0291	-6.0000	-0.5000	-0.6667
k=0	-0.5000	-6.0000	-23.0291	-6.0000	-0.5000
k=1	-0.6667	-0.5000	-6.0000	-23.0291	-6.0000
k=2	-0.1250	-0.6667	-0.5000	-6.0000	-23.0291

表 5.2 当 $n = 2$ 时的 $\gamma_{hk}^{(2)22}$

$\gamma_{hk}^{(2)22}$	$h = -2$	$h = -1$	$h = 0$	$h = 1$	$h = 2$
k=-2	-92.1163	-24.0000	-2.0000	-2.6667	-0.5000
k=-1	-24.0000	-92.1163	-24.0000	-2.0000	-2.6667
k=0	-2.0000	-24.0000	-92.1163	-24.0000	-2.0000
k=1	-2.6667	-2.0000	-24.0000	-92.1163	-24.0000
k=2	-0.5000	-2.6667	-2.0000	-24.0000	-92.1163

表 5.3 当 $n = 3$ 时的 $\gamma_{hk}^{(2)33}$

$\gamma_{hk}^{(2)33}$	$h = -2$	$h = -1$	$h = 0$	$h = 1$	$h = 2$
k=-2	-368.465	-96.0000	-8.0000	-10.6667	-2.0000
k=-1	-96.0000	-368.465	-96.0000	-8.0000	-10.6667
k=0	-8.0000	-96.0000	-368.465	-96.0000	-8.0000
k=1	-10.6667	-8.0000	-96.0000	-368.465	-96.0000
k=2	-2.0000	-10.6667	-8.0000	-96.0000	-368.465

表 5.4 当 $n = 4$ 时的 $\gamma_{hk}^{(2)44}$ ($= 1.0e + 003^*$)

$\gamma_{hk}^{(2)44}$	$h = -2$	$h = -1$	$h = 0$	$h = 1$	$h = 2$
k=-2	-1.47390	-0.38400	-0.03200	-0.04270	-0.00800
k=-1	-0.38400	-1.47390	-0.38400	-0.03200	-0.04270
k=0	-0.03200	-0.38400	-1.47390	-0.38400	-0.03200
k=1	-0.04270	-0.03200	-0.38400	-1.47390	-0.38400
k=2	-0.00800	-0.04270	-0.03200	-0.38400	-1.47390

5.3 微分方程初边值问题的 Shannon 小波解

例 1 求解微分方程边界值问题

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = -16\pi^2 \sin(4\pi x). \\ y(0) = 2, y(1) = 2. \end{cases}$$

这个问题的精确解为 $y_e = 2 + \sin(4\pi x)$.

设

$$y = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \phi_h^0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k^n \psi_k^n(x) + c_1 x + c_2,$$

则

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \sum_{s=-\infty}^{\infty} \lambda''_{hs} \phi_s^0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k^n \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma_{sk}^{mm} \psi_s^m(x).$$

把 $f(x) = -16\pi^2 \sin(4\pi x)$ 也用 Shannon 小波展开, 得

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_h \phi_h^0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k^n \psi_k^n(x).$$

根据相关系数的定义, 当 $m \neq n$ 时, $\gamma_{sk}^{mm} = 0$, 因此, 原方程的 Shannon 小波表达式为

$$\begin{aligned} & \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \sum_{s=-\infty}^{\infty} \lambda''_{hs} \phi_s^0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \beta_k^n \gamma_{sk}^{nn} \psi_s^n(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_h \phi_h^0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k^n \psi_k^n(x). \end{aligned} \quad (5-5)$$

两个边界条件导致了两个附加方程

$$\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \phi_h^0(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k^n \psi_k^n(0) + c_2 = 2, \quad (5-6)$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \phi_h^0(1) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k^n \psi_k^n(1) + c_1 + c_2 = 2. \quad (5-7)$$

(5-5) 式两边都与 $\phi_k^0(x)$ 作内积, 利用正交性, 得

$$\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \lambda''_{hk} = q_k, \quad k \in \mathbf{Z}$$

(5-5) 式两边都与 ψ_r^j 作内积, 利用正交性, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k^n \gamma_{kr}^{nj} = q_r^j,$$

(5-8) 式和 (5-9) 式的逼近方程为

$$\begin{aligned} & \sum_{h=0}^m \alpha_h \lambda''_{hk} = q_k, \quad k = 0, 1, \dots, m \\ & \sum_{n=0}^m \sum_{k=-m}^m \beta_k^n \gamma_{kr}^{nj} = q_r^j, \quad j = 0, 1, \dots, m, r = -s, \dots, m \end{aligned}$$

由上面两个方程求得 α_h 和 β_k^n , 然后代入 (5-6) 式和 (5-7) 式 (n 和 m 的取值范围同上), 求得 c_1 和 c_2 . 分别取 $m = 7$ 和 $m = 9$ 得到的逼近解如图 5.3, 图 5.4 所示

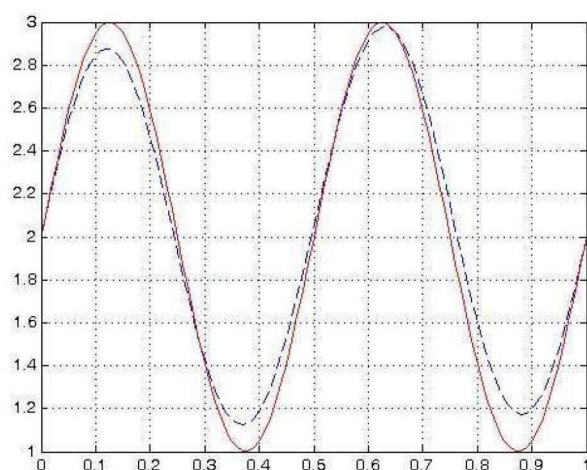


图 5.3 $m = 7$ 时的逼近值.

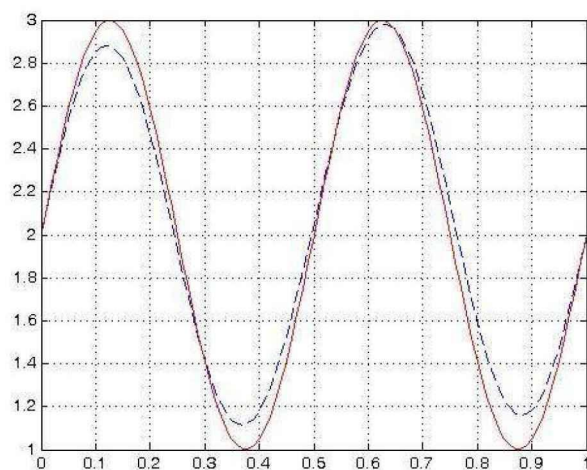


图 5.4 $m = 9$ 时的逼近值.

例 2 求解微分方程边界值问题

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = x^2 - 1. \\ y(0) = 5, y(1) = 10. \end{cases} \quad (5-8)$$

这个问题的精确解为 $y_e = x^2 + 4x + 5$.

设

$$y(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \phi_h^0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k^n \psi_k^n(x), \quad (5-9)$$

则

$$y'(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \sum_{s=-\infty}^{\infty} \lambda'_{hs} \phi_s^0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k^n \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma'_{sk} \psi_s^n(x), \quad (5-10)$$

$$y''(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \sum_{s=-\infty}^{\infty} \lambda_{hs}'' \phi_s^0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k^n \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma_{sk}''' \psi_s^n(x). \quad (5-11)$$

把 (5-9) 式, (5-10) 式和 (5-11) 式代入 (5-8) 式, 然后方程两边分别对 $\phi_k^0(x)$ 和 $\psi_k^n(x)$ 作内积, 得两个方程以求得系数 α_h 和 β_k^n , 获得解 $y_1(x)$.

设

$$y(x) = y_1(x) + (c_1 + xc_2)e^x, \quad (5-12)$$

把边界条件代入 (5-12) 求得 c_1 和 c_2 . 取 $m = 5$ 得到的逼近解如图 5.5 所示:

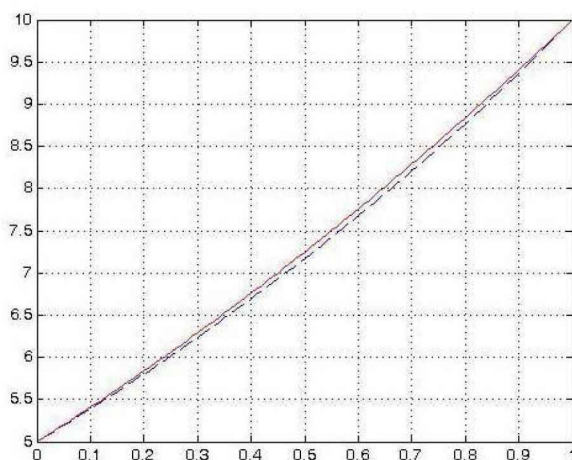


图 5.5 $m = 5$ 时的逼近值.

例 3 求高阶微分方程初值问题

$$\begin{cases} y^{(8)} + y^{(7)} + y^{(6)} + y^{(5)} + y^{(4)} + y^{(3)} + y'' + y' + y = 9e^x, \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = y^{(4)}(0) = y^{(5)}(0) = y^{(6)}(0) = y^{(7)}(0) = 1. \end{cases} \quad (5-13)$$

这个问题的精确解为 $y_e = e^x$.

设

$$y(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \alpha_h \phi_h^0(x). \quad (5-14)$$

则

$$y(x)^{(n)} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \alpha_h \sum_{s=-\infty}^{\infty} \lambda_{hs}^{(n)} \phi_s^0(x), \quad n = 1, 2, \dots, 8. \quad (5-15)$$

把 $y(x)$ 和 $y(x)^{(n)}$ 代入 (5-13) 式, 然后方程两边都与 $\phi_k^0(x)$ 作内积得一个方程组, 可求得 α_h , 由此得 $y_1(x)$.

设原方程的解为 $y(x) = y_1(x) + c_7x^7 + c_6x^6 + c_5x^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$, 根据初值条件, 得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1! & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2! & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3! & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4! & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5! & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6! & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7! \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \sum_{h=-m}^m \alpha_h \phi_h^0(0) \\ 1 - \sum_{h=-m}^m \alpha_h \lambda'_{h0} \phi_h^0(0) \\ 1 - \sum_{h=-m}^m \alpha_h \lambda''_{h0} \phi_h^0(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 - \sum_{h=-m}^m \alpha_h \lambda^{(7)}_{h0} \phi_h^0(0) \end{bmatrix}$$

解得 $c_0, c_1, \dots, c_7$, 得 $y(x)$ 即为逼近解, 如图 5.6 所示

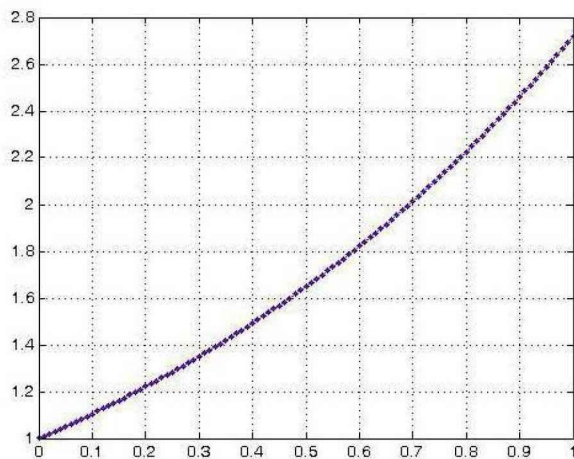


图 5.6 Shannon 小波逼近数值解与精确解比较 ($m=3$).

5.4 本章小结

这一章介绍了 Shannon 小波族, Shannon 尺度函数和小波函数的系数算法, 微分矩阵算法, 并运用 Shannon 小波函数逼近数值解求解常微分方程边界值问题和高阶微分方程的初值问题, 三个实验算例表明该方法的有效性.

6. 结 论

小波分析是近 20 多年来发展起来的新兴的数学分支, 目前已成为国际上极为活跃的研究领域, 有着非常广泛的应用. 它是为了克服傅里叶变换的缺点而发展起来的, 其突出的特点是在时域和频域同时具有良好的局部化性质, 被誉为“数学显微镜”. 微分方程和积分方程的理论和小波数值解也是数学学科研究的重要方向.

在前人研究的基础上, 本文选择了“微积分方程的小波数值解”作为研究课题, 介绍了小波分析的背景、早期小波发展以及当前小波应用研究工作的方向, 从 Fourier 分析开始, 介绍了小波分析的基本理论, 包括小波的本质, 连续小波变换, 离散小波变换, 多分辨分析, 尺度函数与小波函数的构造等内容. 本文分别应用 Haar 小波求解了积分方程和 Shannon 小波求解了微分方程, 经过五个实验算例, 取得了一些研究成果. 本文所作的具体工作如下:

(1) 应用了 Haar 小波配置点法求解线性和非线性第二类 Fredholm 积分方程, 两个实验算例表明该方法的高精度.

(2) 应用了 Shannon 小波数值逼近法求解微分方程的初边值问题, 三个实验算例表明该方法的有效性.

综上所述, 本文针对积分方程的 Haar 小波数值解法和微分方程的 Shannon 小波数值解法所提出的近似解法, 基本实现了高度近似, 具有一定的实用价值. 在本文的撰写和实验过程中, 由于作者能力有限, 还有许多不足的地方, 有待继续努力提高和改进. 比如在应用 Haar 小波数值解求解积分方程时, 还需从理论上给出误差估计; 在应用 Shannon 小波逼近函数求解微分方程时, 前两个算例的近似程度与第三个算例的近似程度有所区别, 说明 Shannon 小波逼近函数的收敛速度还有待进一步研究. 另外, 选择合适的小波求解微积分方程, 也是作者将来研究的方向和重点.

致 谢

研究生三年匆匆而过, 经过懵懂、单纯, 才有了成长、成熟. 突然这一天在逸夫楼前回忆曾经给予过作者传道授业解惑的老师们, 他们依旧辛勤耕耘在这片沃土上, 默默无闻, 孜孜不倦. 在论文的最后作者要十分感谢导师石智教授, 石老师严谨求实的治学之风, 渊博深邃的学术造诣, 高山仰止的道德风范, 谦虚和蔼的处世之道, 使作者在研究生三年里饱受熏陶, 受益终身. 从毕业设计的选题, 到思路方法、中期的检查, 再到论文的撰写、预答辩, 石老师一直给予作者最宝贵的意见和建议, 最真诚的指导, 极大的帮助. 不仅在学术上给予精心帮助, 还在生活上、思想上给予细致入微的关怀, 在此谨向石老师致以诚挚的谢意和崇高的敬意.

感谢高博同学、刘涛同学、史策同学、常锐同学、宋昊同学以及同窗三年的数学系的其他同学, 他们让作者拥有三年美好的回忆. 特别是高博同学给予的帮助, 作者铭记在心.

感谢父母的理解和帮助, 作者能顺利完成硕士学业, 离不开他们的鼓励与支持.

最后对评审论文和参加答辩的各位老师致以最真诚的感谢.

参考文献

- [1] 冯象初, 甘小冰, 宋国乡. 数值泛函与小波理论 [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2003.
- [2] 刘明才. 小波分析及其应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [3] D.B.Percival , A.T.Walden 著, 程正兴译. 时间序列分析的小波方法 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2006, 3.
- [4] 石智. 小波理论 [M]. 西安: 西安建筑科技大学, 2004, 12.
- [5] 许长发, 李国宽. 实用小波方法 [M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2004, 1.
- [6] 程正兴. 小波分析算法与应用 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1998.
- [7] 孙延奎. 小波分析及其应用 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2005, 3.
- [8] 李星. 积分方程 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [9] J.Kondo. Integral equations[M].Oxford University Press. 1991.
- [10] 彭思龙, 李登峰, 谌秋辉. 周期小波理论及其应用 [M]. 北京: 科技出版社. 2003.
- [11] C.F.Chen, C.H.Hsiao. Wavelet approach to optimising dynamic systems[J]. IEE Proc. Control Theory Appl, 1997,146: 213-219.
- [12] Shi zhi, Deng liyuan. Haar wavelet method for solving the convection- diffusion equation[J]. Mathematica Applicata, 2008,21(1): 98-104.
- [13] I.Daubechies 著. 李建平, 杨万年译. 小波十讲 [M]. 国防工业出版社, 2004.
- [14] U.Lepik. Numerical solution of evolution equations by the Haar wavelet method[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007,185: 695-704.
- [15] U.Lepik, E.Tamme. Solution of nonlinear Fredholm integral equations via the Haar wavelet method[J]. Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math, 2007,56: 17-27.
- [16] U.Lepik. Haar wavelet method for nonlinear integro-differential equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006,176: 324-333.
- [17] U.Lepik. Solving integral and differential equations by the aid of non-uniform Haar wavelets[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008,198: 326-332.
- [18] U.Lepik, E.Tamme. Application of the Haar Wavelets for Solution of Linear Integral Equations[J]. Dynamical Systems and Applications, 2004: 495-507.

- [19] U.Lepik. Application of the Haar wavelet transform to solving integral and differential equations[J]. Proc.Estonian Acad.Sci.Math, 2007,56: 28-46.
- [20] C.Vani, A.Avudainayagam. Regularized solution of the cauchy problem for the Laplace equation using Meyer wavelets[J]. Journal of sound and Vibration, 2000,232: 405-430.
- [21] U.Lepik. Numerical solution of differential equations using Haar wavelets[J]. Math. Comput. Simulat, 2003,68: 127-143.
- [22] C.H.Hsiao.Numerical solution of still differential equations via Haar wavelets[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2005,82(9): 1117-1123.
- [23] C.H.Hsiao, W.J.Wang. State analysis of time-varying singular bilinear systems via Haar wavelets.Math[J].Comput.Simul, 2000,52: 11-20.
- [24] C.H.Hsiao, W.J.Wang. Haar wavelet approach to nonlinear stiff systems[J]. Math.Comput.Simul, 2001,57: 347-353.
- [25] C.H.Hsiao, W.J.Wang. Haar wavelet direct method for solving variational problem. Math.Comput.Simul, 2004,64: 569-585.
- [26] C.F.Chen, C.H.Hsiao. Haar wavelet method for solving lumped and distributed-Parameter systems[J]. IEE Proc.Control Theory Appl, 1997,144: 87-94.
- [27] C.F.Chen,C.H.Hsiao. Wavelet approach to optimising dynamic systems[J]. IEE Proc.Control Theory Appl, 1997,146: 213-219.
- [28] J.S.Gu, W.S.Jiang. The Haar wavelets operational matrix of integration[J]. International Journal of Systems Sciences, 1996,27: 623-628.
- [29] K.Maleknejad, T.Lotfi. Expansion method for linear integral equations by cardinal B-spline wavelet and Shannon wavelet asa bases for obtain Galerkin system[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006,175: 347-355.
- [30] K.Maleknejad, D.Rahbar. Numerical solution of Fredholm integral equation of the second kind by using B-spline function[J]. Int.J.Eng.Sci, 2000,13(5): 9-17.
- [31] K.Maleknejad, F.Mirzaee. Using rationalized Haar wavelet for solving linear integral equations[J]. Appl.Math.Comput, 2005,162(2): 579-587.
- [32] M.Razzaghi, S.Yousefi. Legendre wavelets method for the nonlinear Volterra-Fredhlm integral equation[J]. Mathematics and Computers in simulation, 2005,70: 1-8.

- [33] G.Hariharan, K.Kannan, K.R.Sharma. Haar wavelet method for solving Fisher's equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009(34).
- [34] 石智, 叶中华, 张弛. 长方形区域上分离非均匀 Haar 小波 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2007(23): 293-298.
- [35] 叶磊. 应用插值小波求解第二类 Fredholm 积分方程 [J]. 枣庄学院学报, 2007,10(24): 49-52.
- [36] 霍春雷, 冯象初, 张玉双, 宋国乡. 第二类 Fredholm 方程的小波快速算法 [J]. 工程数学学报, 2003,12(20): 42-46.
- [37] 吴静, 林福荣. 某第二类 Fredholm 积分方程的一种数值解法 [J]. 汕头大学学报, 2003(2): 11-18.
- [38] 时宝, 张德存, 盖明久. 微分方程理论及其应用 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.
- [39] 国振喜. 工程微分方程解法与实例 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2004.
- [40] 布朗森著, 刘嘉琨等译. 微分方程及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [41] [美]崔锦泰著, 程正兴译. 小波分析导论 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1995.
- [42] G.Beyikin, R.R.Coifman, V.Rokhlin. Fast wavelet transforms and numerical algorithms [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1991,44(5): 141-183.
- [43] G.Beyikin. On wavelet-based algorithms for solving differential equations[J]. Wavelets: Mathematics and Applications , CRC Press, Boca Raton, 1994: 449-466.
- [44] G.Beyikin and J.M.Keiser. On the adaptive numerical solution of nonlinear partial differential equations in wavelet bases[J]. Journal of Computational Physics, 1997,132(4): 233-259.
- [45] 魏培君. 积分方程及其数值方法 [M]. 北京: 冶金工业出版社, 2007.
- [46] 陈传璋, 侯宗义, 李明忠著. 积分方程论及其应用 [M]. 上海: 上海科技技术出版社, 1987.
- [47] 封建湖, 车刚明, 聂玉峰编著. 数值分析原理 [M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [48] C.Cattani. Shannon wavelets for the solution of integrodifferential equations[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2010.
- [49] C.Cattani. Connection coefficients of Shannon wavelets[J]. Mathematical Modelling and Analysis, 2006,11(2): 117-132.

- [50] C.Cattani. Shannon wavelets theory[J],Mathematical Problems in Engineering, 2008.
- [51] N.M.Bujurke, S.C.Shiralashetti, C.S.Salimath. An application of single-term Haar wavelet series in the solution of nonlinear oscillator equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009,227: 234-244.
- [52] K.Maleknejad, M.Yousefi, K.Nouri. Computational methods for integrals involving functions and Daubechies wavelets[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007,189: 1828-1840.
- [53] 钱伟长著. 微分方程的理论及其解法 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1992.
- [54] J.Liandrat, V.Perrier, Ph.Tchamitchian. Numerical resolution of nonlinear parital differential equations using the wavelet approach[J]. Wavelets and Their Applications, 1992: 181-210.
- [55] 陈文胜, 张永虎. 调和方程自然边界元 Shannon 小波方法 [J]. 高等学校计算数学学报, 2001(2): 125-134.

作者在读研期间的研究成果

- [1] 马晓蒂, 高博, 刘涛. 基于 Haar 小波求解第二类 Fredholm 积分方程. 西安工程大学学报, 2011 年第 25 期第 3 卷.